Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado

Una singularidad no algebrizable de una foliación holomorfa

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Matemáticas

Autor
Juan Marcelo Quiñonez Cochachi

Asesor
Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez

Jurado
Dr. Alfredo Bernardo Poirier Schmitz
Dra. Liliana Puchuri Medina

Lima - Perú
Agosto - 2020

Una singularidad no algebrizable de una foliación holomorfa

Juan Marcelo Quiñonez Cochachi [1]

Tesis presentada en la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) para obtener el grado de Magister en Matemáticas.

Miembros del Jurado:

Dr. Alfredo Bernardo Poirier Schmitz
(Presidente)

Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez
(Asesor)

Dra. Liliana Puchuri Medina
(Miembro)

Lima - Perú
Agosto - 2020

[1] Proyecto DGI 2018-3-003

Resumen

Una singularidad algebrizable es el germen de una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada tal que es analíticamente equivalente al germen de una foliación definida globalmente sobre una superficie proyectiva. La finalidad de este trabajo es exhibir un criterio que nos permita construir un germen que defina una singularidad no algebrizable.

Palabras clave: Foliación, grado de trascendencia, singularidad algebrizable.

Abstract

An algebraizable singularity is the germ of a holomorphic singular foliation in $(\mathbb{C}^2, 0)$ with isolated singularity such that it is analytically equivalent to the germ of a foliation defined globally on a projective surface. The purpose of this work is to present a criterion that allow us the construction of a germ that defines a non-algebraizable singularity.

Keywords: Foliation, transcendence degree, algebraizable singularity.

. . . A mi familia. Por el amor que me brindan y por su apoyo incondicional al darme las fuerzas y los ánimos para no desistir y seguir adelante siempre.

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por cuidar siempre de mi, de mi familia y de mis seres queridos.

A mis padres, mi mamá Teresa Cochachi Mendoza, a mi papá Neptalí Marcelino Quiñonez Inocente, a mis hermanas Cristina y Diana, a mi tía Iris, que siempre están a mi lado brindándome su amor y todo su apoyo. A mis sobrinos Matías, Gianella, Abdiel y Eliana, son una alegría en mi vida.

A todos los maestros que he tenido durante mis años de estudio, en especial al Dr. Percy Fernández Sánchez por su infinita paciencia y su siempre constante apoyo y enseñanzas, gracias profesor.

Al Dr. Alfredo Poirier Schmitz y la Dra. Liliana Puchuri Medina, por sus sugerencias y observaciones que me sirvieron de gran ayuda para culminar esta tesis.

A mis amistades en general que con su alegría hacen olvidar cualquier preocupación.

Introducción

El germen de una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada se dirá que es algebrizable si existe una superficie proyectiva S y un punto $p \in S$ tal que el germen de la foliación sea analíticamente equivalente con el germen en p de una foliación algebraica definida globalmente en S.

Determinar la algebrizabilidad de un germen cualquiera no es tarea sencilla. Por ejemplo, Guy Casale en [6] y Gabriel Calsamiglia y Paulo Sad en [5] dan algunos criterios para determinar la algebrizabilidad de gérmenes arbitrarios que definen foliaciones dicríticas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que son regulares después de una explosión. Por otro lado, determinar una condición para la no algebrizabilidad es otro punto igual de complicado. Sin embargo, Yohann Genzmer y Loïc Teyssier en [10] demostraron que existe una cantidad innumerable de foliaciones con una singularidad de tipo silla-nodo en el plano complejo que no son algebrizables, aunque no proporcionan ningún ejemplo explícito de tales singularidades. Finalmente Valente Ramírez en [17] muestra un ejemplo concreto. La idea detrás es construir una 1-forma que tenga grado de trascendencia infinito.

El objetivo de este trabajo de tesis es mostrar los criterios para construir un germen de una foliación que defina una singularidad no algebrizable. Nuestro resultado principal se concretizará en el siguiente teorema.

Teorema 0.1. *(Singularidad no algebrizable) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ sujetas a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, y sean $f_j = a_j x + b_j y$, $j = 1, 2, 3$, funciones lineales arbitrarias diferentes en $\mathbb{C}[x, y]$. Se define la 1-forma cuadrática homogénea*

$$\omega_0 = f_1 f_2 f_3 \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Sea $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(\mathcal{B})/\mathbb{Q}$ tiene grado de trascendencia infinito y tal que la serie de potencias

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

tiene radio de convergencia positivo. Entonces el germen de la foliación holomorfa definida en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por la 1-forma

$$\omega = \omega_0 + x^2 b(x)(xdy - ydx),$$

es no algebrizable.

Este trabajo de tesis cuenta con 5 capítulos en los que veremos lo siguiente.

En el primer capítulo presentamos conceptos y resultados básicos de los campos vectoriales holomorfos y 1-formas holomorfas, definidas en $(\mathbb{C}^2, 0)$, que serán utilizadas a lo largo de la tesis, estos son necesarios e imprescindibles para el entendimiento de la misma.

En el segundo capítulo haremos un resumen de la teoría de foliaciones. Presentaremos algunos ejemplos importantes de como podemos plasmar foliaciones, pondremos énfasis en las foliaciones holomorfas singulares definidas por campos vectoriales holomorfos y 1-formas holomorfas.

En el tercer capítulo desarrollamos una introducción básica a las extensiones trascendentes. Estas son un tipo particular de extensiones de cuerpos que tienen al menos un elemento trascendente sobre el cuerpo base. El estudio de estas extensiones y sus resultados nos permitirán efectuar la demostración del teorema de Lindemann-Weierstrass con el cual nos será posible obtener un conjunto algebraicamente independiente sobre el cuerpo de los números racionales.

En el cuarto capítulo veremos las equivalencias (analítica y formal) en la clase de gérmenes de campos vectoriales holomorfos no dicríticos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuyo n-jet no desaparece, dicha clase será denotada por $\mathcal{V}_n$. El objeto de este capítulo es conseguir una forma normal para gérmenes genéricos que pertenezcan a una subclase de $\mathcal{V}_n$.

En el quinto capítulo presentamos los gérmenes algebrizables, que son gérmenes de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ analíticamente equivalentes a gérmenes de foliaciones definidas en una superficie algebraica proyectiva; tal equivalencia está directamente ligada al grado de trascendencia de la 1-forma que define dicha foliación. Con ello en cuenta se realizará finalmente la construcción del germen de una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ no algebrizable.

Juan Marcelo Quiñonez Cochachi
Lima, Perú.
2020

Capítulo 1

Preliminares

Empezaremos dando algunas definiciones y resultados generales que se usarán durante el desarrollo de la tesis. Para el desarrollo de este capítulo se sigue como referencias [1], [4] y [8].

Definición 1.1. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el punto $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ si la función $f(z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ es holomorfa en $x_i = z_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Diremos que f es holomorfa en U, si f es holomorfa en todo punto de U. Una función $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ es holomorfa si cada componente f_i es una función holomorfa en U.

1.1. Campo vectorial holomorfo

Un campo vectorial X de clase C^r en la variedad M es una aplicación

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_pM \\ q &\longmapsto X(q) \in T_qM \end{aligned}$$

que asigna a cada punto $x \in U$ un vector tangente $X(x)$, donde $U \subset M$ es un conjunto abierto. Al campo vectorial X se le asocia una ecuación diferencial

$$\mathring{x} = X(x) \tag{1.1}$$

en U. Las soluciones de esta ecuación diferencial tienen forma conocida. Dado un $p \in M$ fijo, la solución de (1.1) es una curva diferenciable $\alpha_p : I_p \longrightarrow M$, definida en el intervalo maximal $I_p \subset \mathbb{R}$, donde $0 \in I_p$ y sujeta a:

1) $\alpha_p(0) = p$,

2) $\alpha_p'(t) = X(\alpha_p(t))$, para todo $t \in I_p$.

Las soluciones α_p de la ecuación (1.1) son llamadas *curvas integrales*.

Definición 1.2. Un *campo vectorial holomorfo* en el abierto $U = (\mathbb{C}^2, 0)$ (vecindad de 0 en $\mathbb{C}^2$) es un campo vectorial

$$\begin{array}{rcl} X : U & \longrightarrow & T\mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & X(x, y) = P(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}, \end{array} \tag{1.2}$$

tal que sus funciones coordenadas P, Q son funciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y donde $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right\}$ es base de $T\mathbb{C}^2$.

Como las funciones coordenadas P y Q del campo vectorial holomorfo X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ son funciones holomorfas, estas tienen una expansión en series de potencias, digamos

$$P(x, y) = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j$$

y

$$Q(x, y) = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} b_{ij}x^i y^j.$$

Si ordenamos en función de los grados de los términos $a_{ij}x^i y^j$ y $b_{ij}x^i y^j$ de la expansión en series de potencias de P y Q respectivamente, podemos expresar las series en función de sumas de polinomios homogéneos, con lo que tendremos

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y)$$

y

$$Q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y),$$

donde P_n y Q_n son polinomios homogéneos de grado n. Por tal motivo podemos expresar el campo holomorfo (1.2) de manera equivalente en función de sumas de polinomios homogéneos cual

$$X(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y)\right)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Por lo tanto, dado un campo vectorial holomorfo expresado en la forma (1.3) es posible estudiarlo en función de sus términos homogéneos. Necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.3. Llamaremos *parte homogénea de grado n* del campo (1.3) a la expresión

$$X_n(x, y) = P_n(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_n(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

donde P_n y Q_n son polinomios homogéneos de grado n.

En particular, si $n = 0$, llamaremos a X_0 *parte constante*; si $n = 1$, llamaremos a X_1 *parte homogénea lineal*; si $n = 2$, llamaremos a X_2 *parte homogénea cuadrática.*

Definición 1.4. Para un campo no nulo X llamaremos la *parte principal o inicial* a la menor parte homogénea de grado n de X que es diferente de cero, es decir, si X_n es la parte principal de X entonces

$$X_n(x, y) = P_n(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_n(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \neq 0$$

y

$$X_k(x, y) = P_k(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_k(x, y)\frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

para todo $k < n$. (se sobreentiende acá $P_k = Q_k = 0$ para todo $k < n$).

Definición 1.5. Dada la serie de potencias $P = \sum_{n=0}^{k} P_n$, llamaremos *orden de* P al grado del polinomio homogéneo de menor grado diferente de cero de la expansión en series de potencias de P, y lo denotaremos $ord(P)$, en otras palabras, si $ord(P) = n$, entonces para todo $k < n$ tenemos que $P_k = 0$ pero $P_n \neq 0$.

Análogamente definimos el orden de la función coordenada Q.

Definición 1.6. Llamaremos *multiplicidad algebraica* del campo X al menor orden de las funciones coordenadas del campo, el cual será denotado por $mult(X)$. Por definición se tiene

$$mult(X) = min\{ord(P), ord(Q)\}.$$

Definición 1.7. Llamaremos *cono tangente* del campo X al polinomio homogéneo

$$R_{n+1}(x, y) = x.Q_n(x, y) - y.P_n(x, y),$$

de grado $n + 1$, aquí P_n y Q_n son las coordenadas homogéneas de la parte principal de X. Cuando $R_{n+1}(x, y) \equiv 0$ decimos que estamos en el *caso dicrítico* o que X es un *campo vectorial dicrítico* y cuando $R_{n+1}(x, y) \neq 0$ decimos que estamos en el *caso no dicrítico* o que X es un *campo vectorial no dicrítico.*

Definición 1.8. Para todo $k \geq 0$, definimos el k - *jet* o *jet de orden* k de X en el punto $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ a la expresión

$$J^k_{(0,0)}(X) = \left(\sum_{n=0}^{k} P_n(x, y)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{n=0}^{k} Q_n(x, y)\right)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.4}$$

Notemos que de las definiciones 1.8 y 1.6, decir que un campo vectorial holomorfo X cumple $mult(X) = n$, es equivalente a afirmar que el $n - 1$ *jet* de X se anula en el origen pero satisface $X_n \neq 0$.

Definición 1.9. Dado un campo vectorial holomorfo X, como en (1.2), con parte lineal no nula, un punto $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$ es llamado *punto singular* si $X(p) = 0$, en caso contrario, p es llamado *punto regular*.

Denotaremos el conjunto de puntos singulares de X como

$$Sing(X) = \{p \in (\mathbb{C}^2, 0)/X(p) = 0\}.$$

Una singularidad p es llamada *reducida* si al menos uno de los autovalores, en adelante λ_1 y λ_2, de la parte lineal

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix},$$

es diferente de cero (supongamos $\lambda_2 \neq 0$) y además $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$.

Decimos que la singularidad reducida p es *no degenerada* si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, de lo contrario p es llamada *silla nodo*, es decir, cuando $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

Ejemplo 1.10. Para el campo vectorial holomorfo

$$X = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

tenemos $p = (0, 0) \in Sing(X)$, con parte lineal

$$DX(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de aquí obtenemos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, y entonces $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0 \notin \mathbb{Q}^+$. Por lo tanto $p = (0, 0)$ es una singularidad reducida silla nodo.

1.2. 1-formas holomorfas

Una 1-forma holomorfa sobre una variedad compleja M de dimensión n, (en breve M^n) es una aplicación

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow \bigcup_{p \in M} (T_pM)^* \\ p &\longmapsto \omega_p \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \omega_p(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i(v), \end{aligned}$$

para todo $p \in M$ y las $a_i : U \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas definidas en una vecindad abierta $U \subset M$ de p.

En general, una r-forma será localmente una aplicación de la forma

$$\begin{aligned} \omega_p : T_pM \times \ldots \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v = (v_1, \ldots, v_r) &\longmapsto \omega_p(v) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} a_{i_1\ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}, \end{aligned}$$

con $i_j \in \{1, \ldots, m\}$. Para simplificar la notación se escribirá

$$\omega_p(v) = \sum_{i_1<\ldots<i_r} a_{i_1\ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} = \sum_I a_I dx_I(v),$$

donde I será la r-tupla $(i_1, \ldots, i_r)$ tal que $1 \leq i_j \leq m$.

Definición 1.11. Sea $\omega = \sum a_I dx_I$ una r-forma y sea $\eta = \sum b_J dx_J$ una s-forma, ambas en M. Se define el *producto exterior* de ω y η como la aplicación

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J,$$

el cual es una $(r+s)$-forma en M.

Definición 1.12. La *diferencial exterior* de una r-forma ω es una $(r+1)$-forma sobre M^n definida por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Denotaremos $\Omega^r(M^n)$ el espacio de las r-formas holomorfas sobre M^n.

Ejemplo 1.13. Veamos las formas diferenciales en $\mathbb{C}^3$, donde a_i, b_i, c son funciones holomorfas en $\mathbb{C}^3$.

- (1-formas): Si $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^3)$, entonces $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$.
- (2-formas): Si $\omega \in \Omega^2(\mathbb{C}^3)$, entonces $\omega = b_1dx_1 \wedge dx_2 + b_2dx_1 \wedge dx_3 + b_3dx_2 \wedge dx_3$.
- (3-formas): Si $\omega \in \Omega^3(\mathbb{C}^3)$, entonces $\omega = cdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
- (4-formas): Si $\omega \in \Omega^4(\mathbb{C}^3)$, entonces $\omega = 0$.

  En general tendremos

- (r-formas): Si $\omega \in \Omega^r(\mathbb{C})^m$ tal que $r > m$, entonces $\omega = 0$.

Observación 1.14. Dada ω una 1-forma, se define su *conjunto singular*

$$Sing(\omega) = \{p \in M : \omega(p) = 0\}.$$

Es un simple ejercicio comprobar que este conjunto está bien definido.

De ahora en adelante trabajaremos en la variedad compleja $\mathbb{C}^2$ y en el abierto $U = (\mathbb{C}^2, 0)$.

Definición 1.15. Una *1-forma holomorfa* en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es una aplicación

$$\omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy, \tag{1.5}$$

en donde A y B son funciones holomorfas definidas en $U = (\mathbb{C}^2, 0)$. Sabemos que por ser funciones holomorfas admiten una expansión en series de potencias, de aquí podemos expresar (1.5) en términos de polinomios homogéneos como

$$\omega(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,y) \right) dx + \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x,y) \right) dy, \tag{1.6}$$

en donde A_n y B_n son polinomios homogéneos de grado n.

Las definiciones de *parte homogénea de grado n, parte princpal, orden y multiplicidad algebraica* de campos holomorfos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definidas en la subsección 1.1, son completamente análogas para 1-formas holomorfas.

Definición 1.16. Para $k \geq 0$, definimos el *k - jet* o *jet de orden k* de la 1-forma holomorfa ω (como en (1.6)) en el punto $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ por la expresión

$$J^k_{(0,0)}(\omega) = \left(\sum_{n=0}^{k} A_n(x,y) \right) dx + \left(\sum_{n=0}^{k} B_n(x,y) \right) dy. \tag{1.7}$$

Definición 1.17. Para la 1-forma ω definida en (1.6) sea $\omega_n = A_n(x,y)dx + B_n(x,y)dy$ su parte principal (inicial). El *cono tangente* de ω es el polinomio homogéneo de grado $n+1$ definido por

$$R_{n+1}(\omega) = x.A_n(x,y) + y.B_n(x,y).$$

Una expresión equivalente a la anterior del cono tangente es dada por

$$R_{n+1}(\omega) = \omega_n(R),$$

donde $R = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ es el campo vectorial radial.

Definición 1.18. Dada ω una 1-forma holomorfa no nula en $(\mathbb{C}^2, 0)$, una función holomorfa $\varphi : D(0, \varepsilon) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definida sobre el disco $D(0,\varepsilon)$ de radio $\varepsilon > 0$ y centro 0 en $\mathbb{C}$ es solución de la ecuación $\omega = 0$ si para cualquier $t \in D(0,\varepsilon)$ cumple

$$\omega(\varphi(t)).\left(\varphi'(t)\right) = 0.$$

Observación 1.19. (Dualidad: 1-formas y campos vectoriales) En variedades de dimensión 2, en particular $\mathbb{C}^2$, existe una “dualidad”entre campos vectoriales y 1-formas. Dado el campo vectorial holomorfo

$$X(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

decimos que la *1-forma holomorfa asociada o dual al campo X* es

$$\omega(x,y) = Q(x,y)dx - P(x,y)dy,$$

similarmente X es *el campo holomorfo asociado o dual a la 1-forma ω*. La relación entre ambos está dada por la ecuación

$$\omega(P,Q) = 0,$$

es decir, las soluciones de X son soluciones de $\omega = 0$.

Definición 1.20. Para una 1-forma $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ definida en una vecindad abierta U de 0 en $\mathbb{C}^2$, una función holomorfa f en U es llamada *integral primera de ω en U* si cumple $\omega \wedge df = 0$.

Ejemplo 1.21. La función $f = x^2y$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es integral primera de la 1-forma $\omega = 2ydx + xdy$ pues cumple

$$\begin{aligned}
\omega \wedge df &= (2ydx + xdy) \wedge d(x^2y) \\
&= (2ydx + xdy) \wedge (2xydx + x^2dy) \\
&= 2yx^2dx \wedge dy + 2yx^2dy \wedge dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.3. Cambio de coordenadas

Gracias a un cambio de coordenadas podemos llevar un campo a otro, y conservar la dinámica de este, ello se hace con el objetivo de trabajar en un campo equivalente expresado de una manera más fácil para estudiar.

Definición 1.22. Consideremos un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ y un campo vectorial holomorfo X definido sobre U. Un *cambio de coordenadas* es un biholomorfismo

$$\begin{aligned}
\phi : U &\longrightarrow V \\
(x,y) &\longmapsto (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = (u,v),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

que lleva las coordenadas (x,y) del abierto U a otro sistema de coordenadas, digamos (u,v), del abierto $V = \phi(U) \subset \mathbb{C}^2$.

Dado un campo vectorial X definido en U, el cambio de coordenadas ϕ definirá un nuevo campo vectorial holomorfo sobre su imagen $V = \phi(U)$ llamado *push forward o imagen directa*, denotado por ϕ_*X y definido como

$$\phi_*X(u,v) = (D\phi.X) \circ \phi^{-1}(u,v). \tag{1.9}$$

En otras palabras, si tenemos el campo vectorial $X(x,y) = P(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\phi_*X(u,v) = \left(\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} . (P(x,y), Q(x,y)) \right) \circ \left(\phi^{-1}(u,v)\right).$$

De igual manera si tenemos el campo vectorial holomorfo Y definido en el abierto $\phi(U)$, vía el cambio de coordenadas ϕ obtendremos un campo vectorial holomorfo en U, definido esta vez como

$$\phi^*Y(x,y) = \left(D\phi^{-1}.Y\right) \circ \phi(x,y),$$

el campo ϕ^*Y es llamado el *pull back o imagen inversa* de Y vía ϕ.

Proposición 1.23. *Consideremos un campo holomorfo X definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ y un cambio de coordenadas ϕ. Entonces un punto $p \in U$ es un punto singular de X si y solo si $\phi(p)$ es un punto singular del campo ϕ_*X.*

Demostración. La prueba es directa. Dado que p es un punto singular de X, se tiene $X(p) = 0$, y de este modo de (1.9) logramos

$$\begin{aligned} \phi_*X(\phi(p)) &= (D\phi.X) \circ \phi^{-1}(\phi(p)) \\ &= D\phi.X(p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $\phi(p)$ es punto singular de ϕ_*X. □

Ejemplo 1.24. Tomemos el campo vectorial holomorfo

$$X(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y sea

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x,y) &\longmapsto (x+y, x-y) = (u,v), \end{aligned}$$

un cambio lineal de coordenadas. Notemos que de inmediato se tiene

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = (x,y). \end{aligned}$$

El cambio de coordenadas ϕ tornará el campo X en un nuevo campo vectorial holomorfo $\phi_* X$ definido por

$$
\begin{aligned}
\phi_* X(u,v) &= \left(\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} . (P(x,y), Q(x,y)) \right) \circ \left(\phi^{-1}(u,v)\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . (P(x,y), Q(x,y)) \right) \circ \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) \\
&= \begin{pmatrix} P\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) + Q\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) \\ \\ P\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) - Q\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\phi_* X(u,v) = \quad & \left(P\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \right) \frac{\partial}{\partial u} + \\
& \left(P\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - Q\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \right) \frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

Como $(0,0)$ es punto singular de X por la propiedad anterior, $\phi(0,0)$ es punto singular de $\phi_* X$, lo cual es claro también de cómo está calculado $\phi_* X$.

1.4. Gérmenes de campos vectoriales y de 1-formas diferenciales

Denotemos $\mathcal{X}_0$ al conjunto de campos vectoriales holomorfos definido en una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}^2$. En tal conjunto podemos definir una relación de equivalencia: las clases de tal relación serán llamados *gérmenes de campos vectoriales holomorfos.*

Definición 1.25. (Germen de campos vectoriales) Sean $X, Y \in \mathcal{X}_0$ definidos, respectivamente, en vecindades U y U' de $0 \in \mathbb{C}^2$. Pongamos $X \sim Y$ cuando exista $V \subset U \cap U'$ vecindad abierta de 0, donde $X|_V = Y|_V$.

Llamaremos *germen de X en* 0 a la clase de equivalencia de X por tal relación, obviamente de equivalencia.

Observación 1.26. En realidad en la definición anterior podemos definir gérmenes de campos holomorfos respecto a cualquier punto $p \in \mathbb{C}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De manera análoga, definiremos gérmenes para 1-formas holomorfas. Denotemos Ψ_p al conjunto de 1-formas holomorfas definidas en una vecindad abierta de un punto p. En tal conjunto podemos definir una relación de equivalencia, las clases de tal relación serán llamados *gérmenes de 1-formas.*

Definición 1.27. (Germen de 1-formas diferenciales) Sean $\omega, \omega' \in \Psi_p$ definidas en vecindades U y U', respectivamente, de $p \in \mathbb{C}^n$. Pondremos $\omega \sim \omega'$, si existe $V \subset U \cap U'$ una vecindad abierta de p tal que $\omega|_V = \omega'|_V$.

Llamaremos *germen de ω en p* a la clase de equivalencia de ω por tal relación. En particular nos interesa el caso cuando $n = 2$ y $p = 0 \in \mathbb{C}^2$.

1.5. Separatrices

Estudiaremos las separatrices de campos holomorfos en $\mathbb{C}^2$, cuya existencia se garantiza gracias al teorema de Camacho - Sad.

Definición 1.28. Sea un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$, si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y no constante, entonces una *curva analítica definida por f* es el conjunto $S = \{q \in U : f(q) = 0\}$.

Ejemplo 1.29. Como caso particular de curvas analíticas tenemos las curvas algebraicas. Por ejemplo, la cúbica de Tschirnhausen es una curva algebraica de grado 3 definida por los ceros de $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - y^2$, cuyo grafico en el plano real es

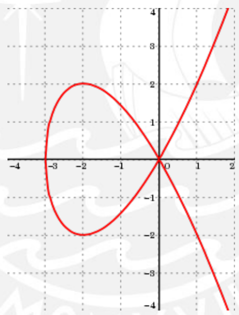

Figura 1.1: Cúbica de Tschirnhausen

Definición 1.30. Tomemos un campo vectorial X definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ y sea p un punto singular de X. Decimos que p es una *singularidad aislada* si existe V_p vecindad abierta, tal que, para todo $q \in V_p - \{p\}$, se tiene $X(q) \neq 0$, es decir, V_p no tiene otro punto singular de X aparte de p.

Ejemplo 1.31. Para el campo

$$X(x, y) = (x^2 - x, xy - x^3)$$

tenemos $Sing(X) = \{x = 0\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$, ahí $(1, 1)$ es la única singularidad aislada.

Ejemplo 1.32. Para el campo

$$X(x, y) = (y^2 + x, y^2 - x^3)$$

tenemos $Sing(X) = \{(0, 0)\}$ y por lo tanto $(0, 0)$ es una singularidad aislada.

Definición 1.33. Sea p una singularidad aislada de X. Una *separatriz* de X por p es una curva analítica S que pasa por p y es tangente a X, esto es equivalente a comprobar $Df(q).X(q) = 0$ para todo $q \in S$, donde f es la función holomorfa que define S.

Ejemplo 1.34. Para el campo $X(x,y) = (x,y)$ se cumple que $p = (0,0)$ es singularidad aislada. La curva analítica $S = \{q \in U = (\mathbb{C}^2, 0) : f(q) = 0\}$ definida por $f = x - y$ es una separatriz de X por p. En este caso se satisface

$$\begin{aligned} Df(q).X(q) &= \left(\frac{\partial f(q)}{\partial x}, \frac{\partial f(q)}{\partial y}\right).X(x_0, y_0) \\ &= (1, -1).(x_0, y_0) \\ &= x_0 - y_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $q = (x_0, y_0) \in S$.

En adelante trabajaremos con campos vectoriales holomorfos en $\mathbb{C}^2$ definidos en una vecindad del origen $(\mathbb{C}^2, 0)$, es decir, consideraremos $p = 0$ la singularidad aislada y $U = (\mathbb{C}^2, 0)$.

Por todo punto singular aislado de un campo vectorial en $\mathbb{C}^2$ pasa una curva definida por los ceros de una función analítica, es decir, queda garantizada la existencia de separatrices en $\mathbb{C}^2$. Tal resultado fue demostrado en 1982 por César Camacho y Paulo Sad, el cual dice lo siguiente.

Teorema 1.35. *(**Teorema de Camacho - Sad**) Por toda singularidad aislada de un campo vectorial holomorfo X definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ siempre pasa al menos una separatriz.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [4].

Definición 1.36. Decimos que una singularidad es *dicrítica* si por ella pasan infinitas separatrices.

Ejemplo 1.37. Sea el campo vectorial $X = (x, iy)$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$, para el cual $Sing(X) = \{(0,0)\}$. Es fácil notar que las únicas separatrices que pasan por $(0,0)$ son las curvas $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto $(0,0)$ es una singularidad no dicrítica.

Ejemplo 1.38. Con el campo vectorial $X = (x, ny)$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $Sing(X) = \{(0,0)\}$. Definamos $f_{\alpha\beta}(x,y) = \alpha x^n - \beta y$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} Df_{\alpha\beta}(x,y).X(x,y) &= x.\alpha n x^{n-1} - ny.\beta \\ &= n\,(\alpha x^n - \beta y) \\ &= n.f_{\alpha\beta}(x,y), \end{aligned}$$

y queda comprobado que para todo $q = (x_0, y_0)$ tal que $f_{\alpha\beta}(q) = 0$ se tiene $Df(q).X(q) = 0$, es decir, cada curva $f_{\alpha\beta}$ es una separatriz que pasa por $(0,0)$. Por lo tanto $(0,0)$ es una singularidad dicrítica.

1.6. Explosión de 0 en $\mathbb{C}^2$

Una *explosión o blow-up* centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ es una variedad compleja $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ de dimensión dos que se obtiene del pegado de dos copias de $\mathbb{C}^2$ con coordenadas (x,t) y (s,y) mediante la transformación $(x,t) \mapsto (s,y) = (\frac{1}{t}, xt)$. La idea es reemplazar el origen por el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^1$ al dejar los otros puntos de $\mathbb{C}^2$ invariantes en un sentido biholomorfo.

Definición 1.39. La *explosión centrada en* $0 \in \mathbb{C}^2$ es el par $\left(\widetilde{\mathbb{C}_0^2}, \pi\right)$ tal que

$$\widetilde{\mathbb{C}_0^2} = \big\{((x,y),[x:y]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 : (x,y) \neq (0,0)\big\} \cup \big(\{(0,0)\} \times \mathbb{CP}^1\big)$$

y la aplicación holomorfa π es definida por

$$\begin{array}{rcl} \pi : \widetilde{\mathbb{C}_0^2} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ ((x,y),[x:y]) & \longmapsto & \pi((x,y),[x:y]) = (x,y), \quad (x,y) \neq (0,0) \\ ((0,0),[x:y]) & \longmapsto & \pi((0,0),[x:y]) = (0,0), \quad (x,y) = (0,0). \end{array}$$

Veamos que $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ es una variedad compleja de dimensión dos.

En efecto. Sean (U_0, φ_0) y (U_1, φ_1) las cartas locales del espacio proyectivo $\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1$, con

$$U_0 = \{[a:b] \in \mathbb{CP}^1 : a \neq 0\}$$

$$U_1 = \{[a:b] \in \mathbb{CP}^1 : b \neq 0\},$$

conjuntos abiertos, y cartas $\varphi_i : \mathbb{C} \longrightarrow U_i$, para $i = 0, 1$, definidas por

$$\varphi_0(a) = [1:a]$$

$$\varphi_1(b) = [b:1],$$

las cuales cumplen

$$\varphi_0^{-1}([a:b]) = \frac{b}{a}$$

y

$$\varphi_1^{-1}([a:b]) = \frac{a}{b}.$$

Por otro lado, consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,t) & \longmapsto & \pi(x,t) = (x,xt) = (x,y). \end{array}$$

de donde claramente se tiene $\pi_1^{-1}(0,0) = \{(0,t) : t \in \mathbb{C}\}$. De aquí podemos concluir que el punto $0 = (0,0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{x = 0\}$. Sin embargo, notemos que no es posible cubrir la recta $\{(0,y) : y \in \mathbb{C}\}$. Para tal fin definimos

$$\begin{array}{rcl} \pi_2 : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (s,y) & \longmapsto & \pi(s,y) = (sy,y) = (x,y), \end{array}$$

con la cual, de manera análoga, se tiene $\pi_2^{-1}(0,0) = \{(s,0) : s \in \mathbb{C}\}$. Igualmente se consigue que el punto $0 = (0,0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{y = 0\}$, aunque no sea posible cubrir la recta $\{(x,0) : x \in \mathbb{C}\}$. En resumen, para cubrir todo $\mathbb{C}^2$ debemos pegar los planos xt y sy, identificando así la recta $\{x = 0\}$ con la recta $\{y = 0\}$.

Ahora definamos los conjuntos.

$$\begin{aligned}
\widetilde{U_0} &= \left\{((x,y),[x:y]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : \frac{y}{x} = \varphi_0^{-1}([x:y])\right\} \cup (\{(0,0)\} \times U_0) \\
&= \left\{((x,xt),[1:t]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : t = \varphi_0^{-1}([1:t])\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{U_1} &= \left\{((x,y),[x:y]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : \frac{x}{y} = \varphi_1^{-1}([x:y])\right\} \cup (\{(0,0)\} \times U_1) \\
&= \left\{((sy,y),[s:1]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : t = \varphi_1^{-1}([s:1])\right\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\widetilde{U_0}$ y $\widetilde{U_1}$ son subconjuntos de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$; además claramente tenemos $\widetilde{\mathbb{C}_0^2} = \widetilde{U_0} \cup \widetilde{U_1}$ así como también $\widetilde{U_0} \cap \widetilde{U_1} = \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1)$.

Ahora consideremos las funciones $\widetilde{\varphi_i} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \widetilde{U_i}$, para $i = 0,1$, definidas mediante

$$\widetilde{\varphi_0}(x,t) = ((x,xt), \varphi_0(t))$$

y

$$\widetilde{\varphi_1}(s,y) = ((sy,y), \varphi_1(s)).$$

Obsérvese que se satisface

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi_0}^{-1}\left(\widetilde{U_0} \cap \widetilde{U_1}\right) &= \left\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 : \widetilde{\varphi_0}(x,t) \in \widetilde{U_0} \cap \widetilde{U_1}\right\} \\
&= \left\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 : ((x,xt), \varphi_0(t)) \in \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1)\right\} \\
&= \left\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 : t \neq 0\right\} \\
&= \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,
\end{aligned}$$

así como

$$\widetilde{\varphi_1}^{-1}\left(\widetilde{U_0} \cap \widetilde{U_1}\right) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C},$$

ambos abiertos en $\mathbb{C}^2$. Además aparecen como funciones cambio de coordenadas las transformaciones

$$\left(\widetilde{\varphi_1}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_0}\right)(x,t) = \left(\frac{1}{x}, xt\right) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

y

$$\left(\widetilde{\varphi_0}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_1}\right)(s,y) = \left(sy, \frac{1}{s}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Así $\widetilde{\varphi_1}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_0}$ y $\widetilde{\varphi_0}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_1}$ son funciones holomorfas. En consecuencia, el par $\left\{\left(\widetilde{U_0}, \widetilde{\varphi_0}\right), \left(\widetilde{U_1}, \widetilde{\varphi_1}\right)\right\}$ es un atlas holomorfo sobre $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$, es decir, $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ resulta una variedad compleja de dimensión 2.

Definición 1.40. Se llamará *divisor excepcional* al conjunto

$$\pi^{-1}(0,0) = \{(0,0)\} \times \mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{CP}^1.$$

Observación 1.41. Notemos que $\pi \circ \widetilde{\varphi}_i : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, para $i = 0, 1$, satisface

$$\pi \circ \widetilde{\varphi_0}(x,t) = (x, xt) = (x,y),$$

$$\pi \circ \widetilde{\varphi_1}(s,y) = (sy, y) = (x,y).$$

Ejemplo 1.42. Para la curva singular $C : x^3 - y^2 = 0$ la explosión de 0 en $\mathbb{C}^2$ convierte C en una curva regular. En el conjunto $\widetilde{U_0}$ el cambio de variable $y = xt$ deviene en $x^3 - (xt)^2 = x^2(x - t^2) = 0$ y con esto se obtiene $x^2 = 0$ o $x - t^2 = 0$. De la misma forma, en el conjunto $\widetilde{U_1}$ el cambio de variable $x = sy$ derive en $(sy)^3 - y^2 = y^2(s^3y - 1) = 0$ y con esto se logra $y^2 = 0$ o $s^3y - 1 = 0$.

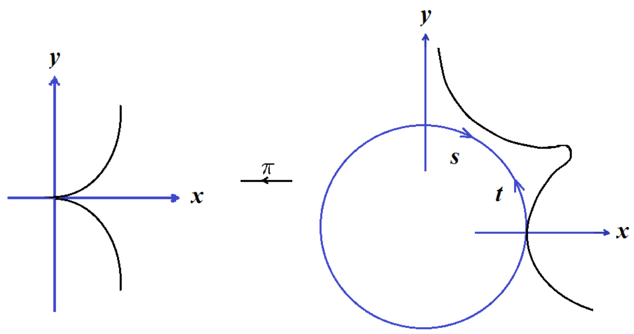

Figura 1.2: Explosión de C en el origen

1.7. Series formales de potencias

Las *series formales de potencias* son series de potencias propiamente dichas en donde la convergencia o divergencia de la misma no es de interés, la idea es poder definirlas y trabajarlas formalmente igual que los polinomios.

Definición 1.43. Sea K un cuerpo. Una *serie formal de potencias* es una expresión de la forma

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_r \geq 0}^{\infty} a_{i_1,\cdots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r},$$

o de manera simplificada

$$\sum_{|I|=0}^{\infty} a_I X^I,$$

donde $a_I = a_{i_1,\cdots,i_r} \in K$, $|I| = i_1 + i_2 + \cdots + i_r$ y $X^I = X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$, y $(i_1, \cdots, i_r)$ es una r-tupla de números naturales.

Podemos expresar una serie formal de potencias como suma infinita de polinomios homogéneos como es usual

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \cdots ,$$

donde P_n es un polinomio homogéneo de grado n.

Denotaremos por $K[[X_1, \cdots, X_r]]$ el anillo de series de formales de potencias. Este efectivamente es un anillo conmutativo con identidad con las operaciones suma y producto de series de potencia usuales definidas de la manera acostumbrada.

Dados $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$ y $g = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n$ escribimos

$$f + g = \sum_{n=0}^{\infty} (P_n + Q_n) ,$$

$$f.g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P_k Q_{n-k} \right) .$$

Observemos que $0 = 0+0+\cdots$ es el elemento neutro (nulo) y $1 = 1+0+0+\cdots$ es el elemento identidad de $K[[X_1, \cdots, X_r]]$.

Dada una serie formal de potencias $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$ no nula, llamaremos *forma inicial* o *cono tangente* de f al polinomio homogéneo no nulo de menor grado, el cual será denotado T_f. Llamaremos *multiplicidad* u *orden* de f al grado de su forma inicial; será denotado $mult(f)$.

Ejemplo 1.44.

1) Con $f = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$, la forma inicial es $T_f = 1$ y la multiplicidad es 0.

2) Con $g = 5X_1X_2 + X_3^2 + 6X_4^3$, la forma inicial es $T_g = 5X_1X_2 + X_3^2$ y la multiplicidad es 2.

3) Convenimos que la multiplicidad de la serie de potencias nula $h = 0 + 0 + \cdots$ es $+\infty$.

Proposición 1.45. *Para $f, g \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$ se tiene*

1) $mult(f + g) \geq min\{mult(f), mult(g)\}$,

2) $mult(f.g) = mult(f) + mult(g)$.

Demostración. Esto es trivial y es dejado como ejercicio al lector. $\square$

Teorema 1.46. *Una serie formal de potencias* $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$ *tiene inversa multiplicativa si y solo si su término independiente es no nulo, es decir, cumple* $mult(f) = 0$.

Demostración. Con la serie formal $g = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$ inversa de f, se tiene $f.g = 1$, y esto implica $mult(f.g) = 0$. De este modo se tiene $P_0.Q_0 = 1$, y por lo tanto $P_0 \neq 0$.

Recíprocamente, al tenerse $P_0 \neq 0$ podemos conseguir $Q_0 \in K^*$ tal que $P_0.Q_0 = 1$. De igual manera podemos conseguir un polinomio homogéneo de grado uno, $Q_1 \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$, tal que $P_1.Q_0 + P_0.Q_1 = 0$, pues bastará tomar $Q_1 = -(P_1.Q_0) P_0^{-1}$. Similarmente ponemos $Q_2 \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$ (polinomio homogéneo de grado 2) sujeto a $P_2.Q_0 + P_1.Q_1 + P_0.Q_2 = 0$. Podemos seguir recursivamente y conseguir $Q_n \in K[[X_1, \cdots, X_r]]$, polinomios homogéneos de grado n, tal que finalmente cumplan $f.g = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P_k Q_{n-k} \right) = 1$. □

Ejemplo 1.47. La serie $1 - X \in K[X]$ no tiene inversa en el anillo de polinomios. Sin embargo como tiene $mult = 0$ tendrá inversa en $K[[X]]$. Tenemos la serie formal de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X} \in K[[X]]$ (serie geométrica), donde evidentemente se cumple

$$(1 - X) \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^n \right) = 1.$$

Recordemos que no estamos interesados en la convergencia o divergencia de las series. Tampoco interesa asignarle valores a la indeterminada, por lo que en el ejemplo anterior al hacer referencia a la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$, es sabido que es convergente para $|x| < 1$ en $K = \mathbb{R}$. Sin embargo para nuestros fines esto carece de importancia.

Observación 1.48. Una expresión tipo

$$X(x, y) = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

con $P, Q \in \mathbb{C}[[x, y]]$ series formales, recibe el nombre de *campo vectorial formal.*

Observación 1.49. Con

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)),$$

tal que $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ donde la parte lineal de ϕ tiene inversa, tendremos un *cambio formal de coordenadas.*

Capítulo 2

Foliaciones

Una foliación sobre una variedad diferenciable M es una estructura generada por un atlas maximal especial que descompone la variedad en subvariedades de igual dimensión llamadas hojas de la foliación. Para nuestro fin las foliaciones más importantes serán las foliaciones holomorfas singulares complejas. Para el desarrollo de este capítulo se sigue como referencia [2], [3], [4] y [13].

2.1. Foliaciones regulares

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y clase C^∞. Una *foliación regular* de clase C^r y de dimensión n, donde $1 \leq n < m$, o de codimensión $m-n$, es un atlas maximal $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ que cumple las siguientes propiedades.

1. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, donde U_1 y U_2 son discos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.

2. Si $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ son tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la función cambio de coordenadas es de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (x, y) &\longmapsto (h_1(x, y), h_2(y)), \end{aligned}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ y $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^r.

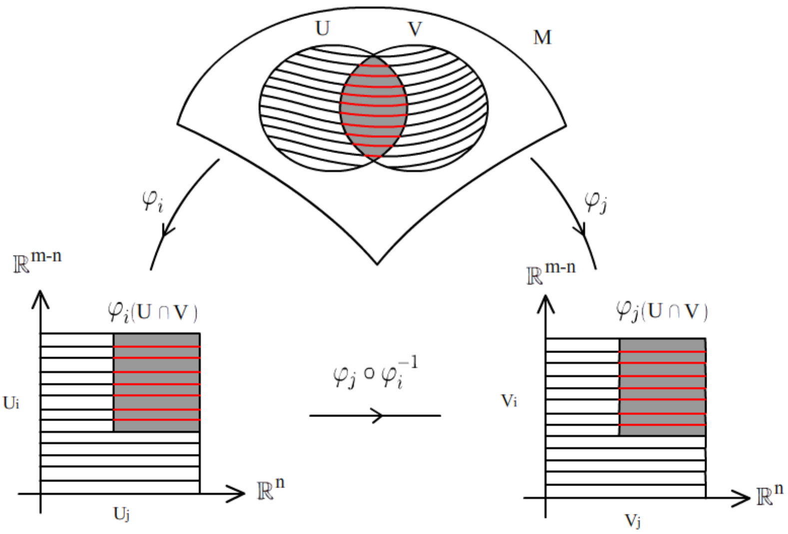

Figura 2.1: Foliación sobre la variedad M

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión n de clase C^r en una variedad M^m y consideremos una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2$.

- Una *placa* de U en $\mathcal{F}$ es un conjunto de la forma $P = \varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, donde $c \in U_2$.

- Una *cadena o camino de placas* es una sucesión de placas $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{F}$ tal que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i = 1, \ldots, k-1$.

- Si P_1, P_2 son placas de U en $\mathcal{F}$ entonces $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ o $P_1 = P_2$.

Dado que la variedad M^m está cubierta por placas de la foliación $\mathcal{F}$, se puede definir una relación de equivalencia de la siguiente manera. Para $a, b \in M$, diremos que a y b están relacionados en $\mathcal{F}$, lo cual se denotará $a\mathcal{R}b$, si existe un camino de placas $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{F}$ tal que $a \in P_1$ y $b \in P_k$.

Definición 2.2. En la variedad M las clases de equivalencia dadas por la relación $\mathcal{R}$ son llamadas las *hojas* de la foliación $\mathcal{F}$.

Las hojas son subvariedades inmersas conexas de dimensión n, además, es sencillo comprobar que una hoja de $\mathcal{F}$ es una unión maximal de placas, de aquí queda garantizada la descripción de la variedad M como unión disjunta de hojas.

2.2. Ejemplos de foliaciones

2.2.1. Foliación definida por submersiones

Sea M^m una variedad diferenciable y sea $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una submersión de clase C^r. Dados $p \in M$ y $f(p) \in \mathbb{R}$, el *teorema de la forma local de las submersiones* (ver [3, pág 16]) garantiza la existencia de una carta local (U, φ) en M, con $p \in U$, y una carta local $(V, \psi) \in \mathbb{R}$, donde $f(p) \in V$, tal que la descomposición $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$

cumple $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ y $\psi(V) = V_2$ donde $U_2 \subset V_2$ y tal que la representación local de f en estas coordenadas $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2$ es la segunda proyección $\pi_2(x, y) = y$.

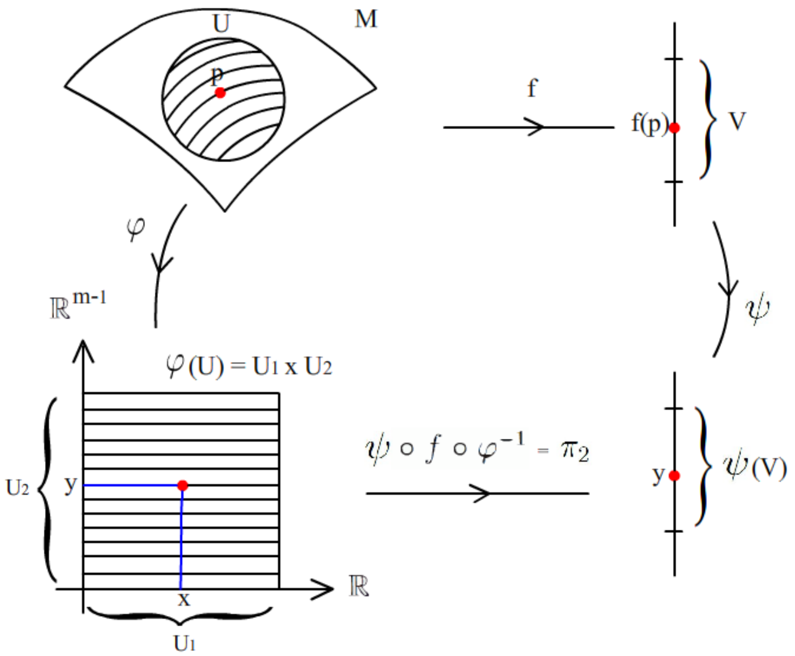

Figura 2.2: Foliación definida por una submersión

Por lo tanto en M tendremos una foliación $\mathcal{F}_f$ de dimensión $m-1$ y clase C^r definida por las cartas (U, φ). Así, las placas son las componentes conexas de los conjuntos de nivel $f_i^{-1}(y)$.

Ejemplo 2.3. La función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

es una submersión si para todo $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cumple que la derivada de f en p es sobreyectiva

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(p)}{\partial x} & \frac{\partial f(p)}{\partial y} & \frac{\partial f(p)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

es decir, si tiene rango 1 y ello ocurre siempre y cuando $p \neq (0, 0, 0)$.

Por lo tanto f es una submersión en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. En consecuencia, por lo anterior tendremos una foliación $\mathcal{F}_f$ de dimensión 2 cuyas hojas son los conjuntos de nivel $C_k = f^{-1}(k)$.

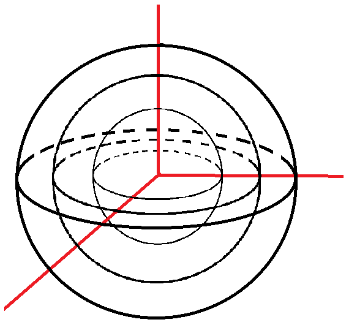

Figura 2.3: Hojas de la foliación $\mathcal{F}_f$

2.2.2. Foliaciones definidas por campos vectoriales

El teorema del flujo tubular (ver [2, pág 15]) nos permite entender el comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos regulares de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema establece que en la vecindad de un punto regular las curvas integrales se pueden alinear paralelamente. Gracias a ello podemos definir una foliación de la siguiente manera.

Sea M^m una variedad diferenciable y sea X un campo vectorial en M. Entonces X genera una foliación $\mathcal{F}_X$ de dimensión 1 en $M - Sing(X)$ donde las órbitas de X son las hojas de $\mathcal{F}_X$.

La estructura de foliación se debe al teorema del flujo tubular. En efecto, para todo $p \in M - Sing(X)$ y dada $\sigma : A \subset \mathbb{R}^{m-1} \longrightarrow \Sigma$ una sección transversal de X de clase C^r tal que $\sigma(A) = \Sigma$ y $\sigma(0) = p$, el teorema del flujo tubular garantiza la existencia de $V \subset M$, una vecindad de p, y un difeomorfismo $h : V \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ de clase C^r donde $W \subset \mathbb{R}^{m-1}$ y $\varepsilon > 0$ tal que

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times W$,

2. h es una C^r-conjugación entre $X|_V$ y el campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definido por $Y = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

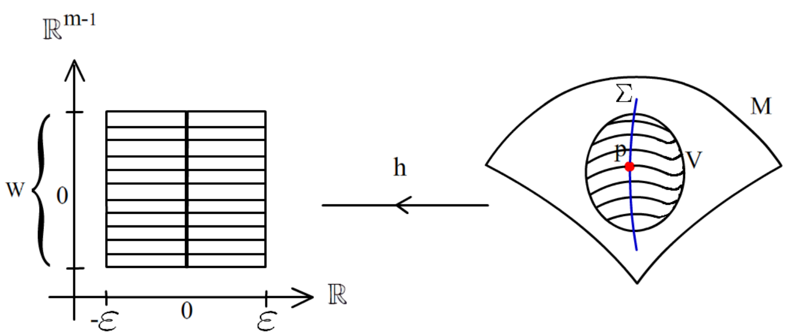

Figura 2.4: El teorema del flujo tubular

Por consiguiente las órbitas del campo vectorial X en la vecindad V están alineadas en forma paralela y se puede obtener una estructura de foliación.

Ejemplo 2.4. Para el campo vectorial $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido $X(x, y) = (-y, x)$.

$$\begin{cases} \mathring{x} = -y \\ \mathring{y} = x \end{cases}$$

tenemos la solución

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (r\cos t, r \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Este campo vectorial define una foliación $\mathcal{F}_X$ cuyas hojas son círculos concéntricos.

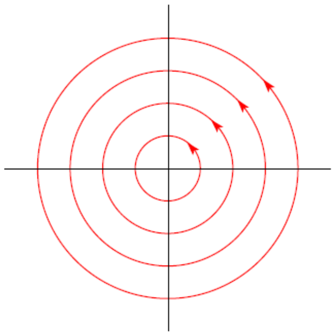

Figura 2.5: Hojas de la foliación $\mathcal{F}_X$

2.2.3. Foliaciones definidas por formas diferenciales

Una 1-forma en una variedad M es *integrable* si define una foliación. El teorema de Frobenius brinda condiciones necesarias y suficientes para garantizar esto.

Definición 2.5. Tomemos una 1-forma ω en M^m, variedad diferenciable. Se dice que ω es *integrable* si existe una foliación $\mathcal{F}$ en $M - Sing(\omega)$ que cumple $T\mathcal{F} = Ker(\omega)$. En otras palabras, el espacio tangente en p a una hoja de $\mathcal{F}$ coincide con $Ker(\omega_p)$, donde por definición se tiene

$$Ker(\omega_p) = \{v \in T_pM : \omega_p(v) = 0\}.$$

Si ω es integrable, una *solución u hoja* de $\omega = 0$ es una subvariedad inmersa C que satisface $T_pC = Ker(\omega_p)$ para todo $p \in C$.

Teorema 2.6. *(**Teorema de Frobenius**) Sea ω una 1-forma. Entonces ω es integrable, si y solo si se cumple $\omega \wedge d\omega = 0$.*

Una demostración del teorema se puede encontrar en [2, pág 37].

Observación 2.7. En el caso de una variedad M de dimensión 2, siempre existirá una foliación definida por una 1-forma diferencial, pues toda 1-forma $\omega \in \Omega^1(M^2)$ es integrable ya que se cumple el teorema de Frobenius de manera trivial: se tiene siempre $\omega \wedge d\omega \in \Omega^3(M^2)$ y con ello $\omega \wedge d\omega = 0$.

Ejemplo 2.8. Debido a la observación 1.19, la forma dual del campo vectorial mostrado en el ejemplo 2.4 está dada por la 1-forma $\omega = xdx + ydy$. Esta 1-forma definirá la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$, cuya solución son las curvas $C : x^2 + y^2 = r^2$. En efecto, para esto se debe verificar $T_pC = Ker(\omega_p)$, donde

$$Ker(\omega_p) = \{(v_1, v_2) : \omega_p(v_1, v_2) = x.v_1 + y.v_2 = 0\}$$

y

$$T_pC = \{(u_1, u_2) = \varphi'(0) : \varphi(0) = p\}.$$

Verifiquemos que se cumpla la condición. Para $p = (x, y) \in C$, sea $(u_1, u_2) = \varphi'(0) \in T_pC$, donde $\varphi(t) = (x(t), y(t)) \in C$. Entonces se tiene $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, si solo si $2x(t).x'(t) + 2y(t).y'(t) = 0$, si solo si $x(t).x'(t) + y(t).y'(t) = 0$.

Para $t = 0$ tenemos

$$x(0).x'(0) + y(0).y'(0) = 0. \tag{2.1}$$

Por otro lado, de $\varphi(0) = p$ claramente tenemos $x(0) = x$ e $y(0) = y$. Si reemplazamos en (2.1) obtenemos $x.u_1 + y.u_2 = 0$. En conclusión se logra $(u_1, u_2) \in Ker(\omega_p)$.

Aquí las hojas de la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$, son las curvas $C : x^2 + y^2 = r^2$.

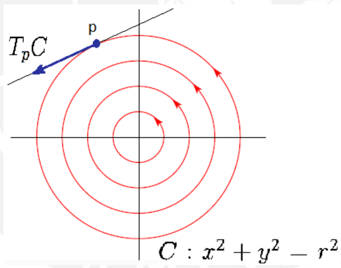

Figura 2.6: Hoja de la foliación $\mathcal{F}_\omega$

2.3. Foliaciones holomorfas

A lo largo de esta tesis trabajaremos con foliaciones holomorfas cuya definición es análoga al anterior caso real, solo que ahora el cuerpo numérico en el que trabajamos son los números complejos. Las foliaciones holomorfas también se pueden definir por la acción de campos vectoriales holomorfos y formas holomorfas, ello gracias al homeomorfismo natural $\mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$.

Una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión n sobre una variedad holomorfa M^m es llamada *foliación holomorfa singular* si existe un conjunto analítico $Sing(\mathcal{F}) \subset M^m$ tal que $\mathcal{F}$ es una foliación de dimensión n sobre $M - Sing(\mathcal{F})$, acá $Sing(\mathcal{F})$ es el conjunto de puntos singulares del campo vectorial o 1-forma que genera la foliación.

Observación 2.9. (Foliación singular de dimensión uno) Las foliaciones singulares de dimensión uno pueden ser localmente definidas por campos vectoriales. Veamos.

Sea M^n una variedad compleja, $n \geq 2$. Una foliación holomorfa singular de dimensión uno en M es un objeto $\mathcal{F}$ dado por las colecciones $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset}$ que cumplen

1) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de M,

2) X_α es un campo vectorial holomorfo no idénticamente nulo en U_α,

3) $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*$, es una función holomorfa no nula,

4) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces se tiene $X_\alpha = g_{\alpha\beta}.X_\beta$.

Para cada campo X_α consideremos el conjunto singular dado por

$$Sing(X_\alpha) = \{p \in U_\alpha | X_\alpha(p) = 0\},$$

donde $Sing(X_\alpha)$ es un subconjunto analítico, luego pondremos

$$Sing(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} Sing(X_\alpha),$$

el cual define un conjunto analítico de M. Tal conjunto es llamado el *conjunto singular de* $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ define en todo rigor una foliación en $M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Observación 2.10. (Foliación singular de codimensión uno) Las foliaciones singulares de codimensión uno pueden ser localmente definidas por 1-formas integrables. Veamos.

Sea M^n una variedad compleja, $n \geq 2$. Una foliación holomorfa singular de codimensión uno en M es un objeto $\mathcal{F}$ dado por las colecciones $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset}$ que cumplen lo siguiente

1) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de M,

2) ω_α es una 1-forma holomorfa integrable no idénticamente nula en U_α,

3) $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*$, es una función holomorfa no nula,

4) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces se tiene $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}.\omega_\beta$.

Para cada 1-forma ω_α su conjunto singular está dado por

$$Sing(\omega_\alpha) = \{p \in U_\alpha | \omega_\alpha(p) = 0\};$$

globalmente pondremos

$$Sing(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} Sing(\alpha_\alpha),$$

llamado el *conjunto singular de* $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ define una foliación en todo rigor en $M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Observación 2.11. En caso que $Sing(\mathcal{F}) = \emptyset$ diremos que la foliación holomorfa $\mathcal{F}$ es regular.

2.3.1. Foliaciones dicríticas

Definición 2.12. Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de dimensión uno en una variedad M^n, $n \geq 2$ y $p \in Sing(\mathcal{F})$. Decimos que la foliación $\mathcal{F}$ tiene una separatriz en p, si existe una vecindad U de p y un subconjunto analítico irreducible S de dimensión uno de U, de modo que se cumple

1. $p \in S$
2. $S \setminus \{p\}$ es una hoja de $\mathcal{F}$.

Observación 2.13. Como las foliaciones de dimensión uno están localmente definidas por campos vectoriales, preguntarnos si una foliación posee o no una separatriz es equivalente a saber si un campo vectorial definido en $(\mathbb{C}^2, 0)$ (vecindad de 0 en $\mathbb{C}^2$) y con singularidad en 0 posee o no una separatriz.

A partir de ahora consideraremos las foliaciones definidas sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$. En este ambiente tenemos el teorema de Camacho - Sad.

Teorema 2.14. *(**Teorema de Camacho - Sad**) Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de dimensión uno en una variedad compleja M de dimensión dos con una singularidad aislada $p \in M$. Entonces $\mathcal{F}$ posee al menos una separatriz en p.*

Definición 2.15. Sea $\mathcal{F}$ una foliación definida en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad en el origen. Diremos que $\mathcal{F}$ es una *foliación dicrítica* si tiene infinitas separatrices que pasan por el origen. En caso contrario $\mathcal{F}$ es llamada *foliación no dicrítica.*

Ejemplo 2.16. Para la 1-forma $\eta = 2ydx - xdy$, se tiene $Sing(\eta) = \{(0,0)\}$, con $(0,0)$ singularidad aislada. Tenemos que las curvas $y = cx^2$, $c \in \mathbb{C}$, son separatrices en $(0,0)$. Como existen infinitas de ellas, la foliación $\mathcal{F}_\eta : \eta = 0$ es dicrítica.

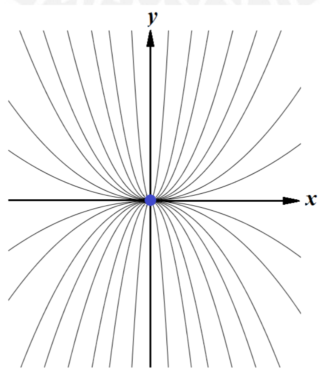

Figura 2.7: Hojas de la foliación $\mathcal{F}_\eta$

Ejemplo 2.17. Consideremos las curvas $f : y^2 - x^3 = c$, que sean soluciones para la 1-forma $\omega = 0$, es decir, que cumplan $\omega = df$. Así tenemos la 1-forma $\omega = 2ydy - 3x^2dx$, donde $Sing(\omega) = \{(0,0)\}$. Notemos que la única curva que pasa por la singularidad $(0,0)$ es la curva de nivel para $c = 0$. Por dicho motivo existe una sola separatriz, y la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ es no dicrítica.

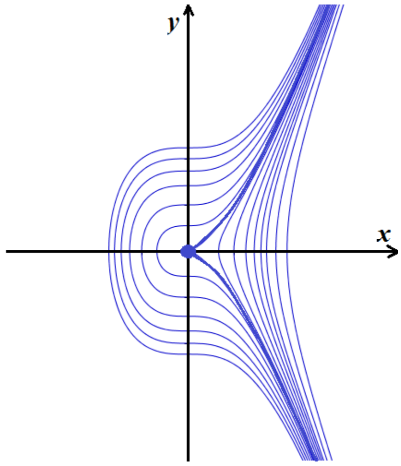

Figura 2.8: Hojas de la foliación $\mathcal{F}_\omega$

2.4. Foliaciones en el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^2$

Las foliaciones singulares definidas por campos polinomiales o 1-formas polinomiales en el plano complejo $\mathbb{C}^n$ se pueden intepretar como foliaciones singulares en el plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ y viceversa. Tales foliaciones son llamadas *foliaciones algebraicas.*

2.4.1. El espacio proyectivo

Sea el espacio afin $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} = \{p = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y consideremos la relación de equivalencia $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ cuando $x_i = \lambda y_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$ y para algún $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Definición 2.18. El espacio proyectivo de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ es el espacio cociente

$$\begin{aligned} \mathbb{KP}^n &= \frac{\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} - \{0\}}{\sim} = \{[x_0 : \dots : x_n]\} \\ &= \{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} / (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n))\}. \end{aligned}$$

Consideremos los conjuntos $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n], x_i \neq 0\} \subset \mathbb{KP}^n$, para $i = 0, 1, \dots, n$. De aquí podemos entender el espacio proyectivo como unión de tales conjuntos, es decir, $\mathbb{KP}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$; más aún, es fácil notar el homeomorfismo $U_i \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, además de la siguiente identificación $\mathbb{KP}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \sqcup \mathbb{KP}^{n-1}$.

Los conjuntos U_i dotan a $\mathbb{KP}^n$ de estructura de variedad topológica compacta (real o compleja) vía los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n &\longrightarrow U_i \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto [a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_i : \dots : a_n]. \end{aligned}$$

Los cambios de coordenadas entre U_i y U_j, están dados por

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j).$$

Observación 2.19. Si $n = 1$, entonces $\mathbb{KP}^1$ es llamado *recta proyectiva*. Si $n = 2$ entonces $\mathbb{KP}^2$ es el *plano proyectivo*.

En $\mathbb{KP}^n$ llamamos hiperplano del infinito, denotado H_i, al complemento de U_i en el espacio proyectivo, es decir, $H_i = \{[a_0 : \ldots : a_n] : a_i = 0\}$. Si $n = 2$ entonces H_i es llamada recta del infinito.

Proposición 2.20. *Dada una foliación $\mathcal{F}$ inducida por un campo polinomial X en $\mathbb{C}^2$, existe una foliación definida en $\mathbb{CP}^2$ que coincide con $\mathcal{F}$ en $\mathbb{C}^2$.*

Demostración. Escribamos $\mathbb{CP}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Tomemos las cartas $\varphi_i : \mathbb{C}^2 \longrightarrow U_i$

$$\varphi_0(x, y) = [1 : x : y],$$

$$\varphi_1(u, v) = [u : 1 : v],$$

$$\varphi_2(s, t) = [s : t : 1],$$

con cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}
\varphi_{01}(x, y) = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_0(x, y) &= \varphi_1^{-1}(\varphi_0(x, y)) \\
&= \varphi_1^{-1}([1 : x : y]) \\
&= \varphi_1^{-1}\left(\left[\frac{1}{x} : 1 : \frac{y}{x}\right]\right) \\
&= \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) \\
&= (u, v),
\end{aligned}$$

es decir

$$\varphi_{01}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right) = (u, v); \tag{2.2}$$

análogamente tendremos

$$\varphi_{02}(x, y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{x}{y}\right) = (s, t). \tag{2.3}$$

Sea X un campo vectorial polinomial en $\mathbb{C}^2$. Si identificamos $\mathbb{C}^2$ con la carta (U_0, φ_0) (en coordenadas (x, y)) podemos expresar X en esta carta de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
X : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \bigcup_{(x,y)\in\mathbb{C}^2} T_{(x,y)}\mathbb{C}^2 \\
(x, y) &\longmapsto P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

donde $n = máx\{degP, degQ\}$, acá n es llamado el *grado del campo* X. Denotemos por X_0 el campo X en la carta (U_0, φ_0). (i.e, $X_0 = (P(x, y), Q(x, y))$). En uso del cambio de coordenadas φ_{01} llevamos el campo X_0 a la carta (U_1, φ_1) (en coordenadas (u, v)) el cual será denotado X_1 y queda expresado cual $X_1 = (\varphi_{01})_* X_0 =$

$D(\varphi_{01})\, X_0$.

Al evaluar la derivada

$$\begin{array}{rcl} D(\varphi_{01}) : T_{(x,y)}\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & T_{(u,v)}\mathbb{C}^2 \\ X_0 = (P(x,y), Q(x,y)) & \longmapsto & D(\varphi_{01})\,(P(x,y), Q(x,y)), \end{array}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} D(\varphi_{01})\,(P(x,y), Q(x,y)) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{01}^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{01}^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_{01}^2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{01}^2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{x^2} P(x,y) \frac{\partial}{\partial u} + \left(-\frac{y}{x^2} P(x,y) + \frac{1}{x} Q(x,y) \right) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

De (2.2) tenemos $x = \dfrac{1}{u}$ e $y = \dfrac{v}{u}$, con lo que al reemplazar se tendrá

$$X_1 = D(\varphi_{01})\, X_0 = -u^2.P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(-uv.P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + u.Q\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \right) \frac{\partial}{\partial v}. \tag{2.4}$$

Analicemos la relación (2.4).

Como $degP \leq n$, podemos reemplazar

$$P(x,y) = P_0(x,y) + P_1(x,y) + P_2(x,y) + \cdots + P_n(x,y),$$

donde los P_i son polinomios homogéneos de grado i. Luego al reemplazar $x = \dfrac{1}{u}$ e $y = \dfrac{v}{u}$ obtenemos

$$P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = P_0\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + P_1\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) + \cdots + P_n\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) \tag{2.5}$$

$$= P_0(1,v) + \frac{1}{u} P_1(1,v) + \frac{1}{u^2} P_2(1,v) + \cdots + \frac{1}{u^n} P_n(1,v). \tag{2.6}$$

Multiplicar (2.6) por $-u^2$ conduce a

$$\begin{aligned} -u^2.P\left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) &= -u^2.P_0(1,v) - u^1.P_1(1,v) - u^0.P_2(1,v) - \cdots - u^{2-n}.P_n(1,v) \\ &= -\frac{1}{u^{n-1}} \left(u^{n+1}.P_0(1,v) + u^n.P_1(1,v) + \cdots + u.P_n(1,v) \right); \end{aligned}$$

y de aquí pasamos a

$$-u^2.P\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)=-\frac{1}{u^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n}u^{n+1-i}P_i(1,v)\right). \tag{2.7}$$

Al multiplicar (2.6) por $-uv$ tendremos

$$\begin{aligned}-uv.P\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right) &= -uv.P_0(1,v)-v.P_1(1,v)-\frac{v}{u}P_2(1,v)-\cdots-\frac{v}{u^{n-1}}P_n(1,v)\\ &= -\frac{1}{u^{n-1}}v\left(u^n.P_0(1,v)+u^{n-1}.P_1(1,v)+\cdots+u^0.P_n(1,v)\right)\end{aligned}$$

y de este modo logramos

$$-uv.P\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)=-\frac{1}{u^{n-1}}\left(v\sum_{i=0}^{n}u^{n-i}P_i(1,v)\right). \tag{2.8}$$

Similarmente, como $degQ \leq n$, tenemos

$$Q(x,y)=Q_0(x,y)+Q_1(x,y)+Q_2(x,y)+\cdots+Q_n(x,y),$$

donde los Q_i son polinomios homogéneos de grado i. Luego al reemplazar $x=\frac{1}{u}$ e $y=\frac{v}{u}$ tenemos

$$Q\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)=Q_0(1,v)+\frac{1}{u}Q_1(1,v)+\frac{1}{u^2}Q_2(1,v)+\cdots+\frac{1}{u^n}Q_n(1,v). \tag{2.9}$$

Al multiplicar (2.9) por u y factorizar $\frac{1}{u^{n-1}}$ al lado derecho tendremos

$$u.Q\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{u^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n}u^{n-i}Q_i(1,v)\right). \tag{2.10}$$

Por lo tanto al reemplazar (2.7), (2.8) y (2.10) en (2.4) y factorizar $\frac{1}{u^{n-1}}$, tenemos el nuevo campo

$$X_1=\frac{1}{u^{n-1}}\left[\left(-\sum_{i=0}^{n}u^{n+1-i}P_i(1,v)\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\sum_{i=0}^{n}u^{n-i}\left(-vP_i(1,v)+Q_i(1,v)\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}\right]. \tag{2.11}$$

Si denotamos $R_i=-vP_i(1,v)+Q_i(1,v)$, entonces el campo X_1 se dejará escribir

$$X_1=\frac{1}{u^{n-1}}\left[\left(-\sum_{i=0}^{n}u^{n+1-i}P_i(1,v)\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\sum_{i=0}^{n}u^{n-i}R_i\right)\frac{\partial}{\partial v}\right]. \tag{2.12}$$

De manera análoga, mediante el cambio de coordenadas φ_{02} podemos llevar el campo X_0 a la carta (U_2, φ_2) (en coordenadas (s,t)) al cual denotaremos X_2. Así, de (2.3) tenemos $x = \dfrac{t}{s}$ e $y = \dfrac{1}{s}$, y la misma rutina conduce a

$$X_2 = \frac{1}{s^{n-1}}\left[\left(-\sum_{i=0}^{n} s^{n+1-i}Q_i(t,1)\right)\frac{\partial}{\partial s} + \left(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i}\left(P_i(t,1) - t.Q_i(t,1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]. \tag{2.13}$$

Con $T_i = (P_i(t,1) - t.Q_i(t,1)$, el campo X_2 se escribirá

$$X_2 = \frac{1}{s^{n-1}}\left[\left(-\sum_{i=0}^{n} s^{n+1-i}Q_i(t,1)\right)\frac{\partial}{\partial s} + \left(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i}T_i\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]. \tag{2.14}$$

Como X_0 es un campo vectorial polinomial, las expresiones anteriores implican que X_1 y X_2 son campos meromorfos con polos en la recta del infinito $(u = 0)$ y $(s = 0)$, respectivamente, respecto a la carta (U_0, φ_0) .

Además el orden del polo tiene un comportamiento predecible. Si en (2.12) y (2.14) tenemos que R_n y T_n son idénticamente nulos, entonces el orden del polo será $n-2$, pero si R_n o T_n no son idénticamente nulos, entonces el orden del polo será $n-1$. Para eliminar el polo se multiplicará (2.12) y (2.14) por u^k y s^k respectivamente, donde $k = n-1$ o $n-2$, según sea el caso, por lo tanto en cada carta (U_i, φ_i) aparece un campo vectorial polinómico con singularidades aisladas.

Por lo tanto, dado un campo polinómico X en $\mathbb{C}^2$ de grado n, podemos definir una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{CP}^2$ generada por X, tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es definida por X_i, $i = 0, 1, 2$, es decir

- $X_0 = X$ en U_0
- $X_1 = u^k(\varphi_{01})_* X$ en U_1
- $X_2 = s^k(\varphi_{02})_* X$ en U_2

donde se tiene que $k = n-1$ o $n-2$ es el orden del polo de X.

□

2.5. Explosión de una foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$

Sea $\mathcal{F}$ el germen de una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada en 0, tal que $\mathcal{F}$ esté generada por el campo vectorial holomorfo

$$X = N(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + M(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

o de manera equivalente por la 1-forma

$$\omega = M(x,y)dx - N(x,y)dy.$$

Si suponemos $mult(\omega) = n$, podemos escribir el desarrollo de Taylor de ω en 0 cual

$$\omega = \left(\sum_{k=n}^{\infty} M_k\right) dx - \left(\sum_{k=n}^{\infty} N_k\right) dy,$$

donde M_k y N_k son polinomios homogéneos de grado $k \geq n$.

Sea V una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}^2$ en donde están definidos $M, N \in \mathbb{C}\{x, y\}$ cuando $(x, y) \in V$, y sea (V, π) la explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$, digamos $\pi : V \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. La 1-forma $\pi^*\omega$ generará una foliación sobre V; tal foliación se denotará $\pi^*\mathcal{F}$ y será llamada *la explosión de* $\mathcal{F}$ *en* $0 \in \mathbb{C}^2$.

La 1-forma $\pi^*\omega$ se escribe en la carta de coordenadas (x, t) como

$$\pi^*\omega = M(x, xt)dx - N(x, xt)d(xt),$$

donde $y = xt$. Para ser más específicos tenemos

$$\begin{aligned}
\pi^*\omega &= \left(\sum_{k=n}^{\infty} M_k(x, xt)\right) dx - \left(\sum_{k=n}^{\infty} N_k(x, xt)\right) d(xt) \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} M_k(x, xt)\right) dx - \left(\sum_{k=n}^{\infty} N_k(x, xt)\right) (tdx + xdt) \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} (M_k(x, xt) - t.N_k(x, xt))\right) dx - x\left(\sum_{k=n}^{\infty} N_k(x, xt)\right) dt \\
&= \left(\sum_{k=n}^{\infty} x^k (M_k(1, t) - t.N_k(1, t))\right) dx - x\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^k N_k(1, t)\right) dt,
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\pi^*\omega = x^n \left[\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n} (M_k(1, t) - t.N_k(1, t))\right) dx - x\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n} N_k(1, t)\right) dt\right]. \tag{2.15}$$

Análogamente, la 1-forma $\pi^*\omega$ se escribe en la carta de coordenadas (s, y) como

$$\pi^*\omega = y^n \left[y\left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n} M_k(s, 1)\right) ds + \left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n} (s.M_k(s, 1) - N_k(s, 1))\right) dy\right], \tag{2.16}$$

donde $x = sy$.

Equivalente a la 1-forma (2.15) tenemos el campo dual en coordenadas (x, t) dado por

$$\pi^*X = x^n \left[x\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n} N_k(1, t)\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n} (M_k(1, t) - t.N_k(1, t))\right) \frac{\partial}{\partial t}\right], \tag{2.17}$$

de igual forma, equivalente a la 1-forma (2.16) tenemos un campo dual en coordenadas (s,y) dado por

$$\pi^*X = y^n\left[-\left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n}\left(s.M_k(s,1)-N_k(s,1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial s} + y\left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n}M_k(s,1)\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{2.18}$$

Para el cono tangente del campo X dado por

$$R_{n+1}(x,y) = xM_n(x,y) - yN_n(x,y),$$

ocurre que puede ser cero o no. Veamos ambos casos.

Supongamos $R_{n+1}(x,y) = 0$ (caso dicrítico). En esta situación, en coordenadas $(1,t)$, tenemos $R_{n+1}(1,t) = M_n(1,t) - t.N_n(1,t) = 0$. Por lo tanto de (2.17) conseguimos

$$\frac{\pi^*X}{x^{n+1}} = \left[\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n}N_k(1,t)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-(n+1)}\left(M_k(1,t)-t.N_k(1,t)\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\right], \tag{2.19}$$

análogamente, en coordenadas $(s,1)$ tenemos $R_{n+1}(s,1) = s.M_n(s,1) - N_n(s,1) = 0$, y de (2.18) se tiene el campo

$$\frac{\pi^*X}{y^{n+1}} = \left[-\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} y^{k-(n+1)}\left(s.M_k(s,1)-N_k(s,1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial s} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n}M_k(s,1)\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{2.20}$$

En (2.19) y (2.20) pongamos $\widetilde{X_1}(x,t) = \dfrac{\pi^*X}{x^{n+1}}$ y $\widetilde{X_2}(s,y) = \dfrac{\pi^*X}{y^{n+1}}$; tales campos están definidos, respectivamente, en los abiertos $\widetilde{U_0}$ y $\widetilde{U_1}$ de la explosión $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$. De aquí la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ se representa en $\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$ por los campos $\widetilde{X_1}(x,t)$ y $\widetilde{X_2}(s,y)$.

Como alternativa consideremos $R_{n+1}(x,y) \neq 0$ (caso no dicrítico). En coordenadas $(1,t)$ tenemos $R_{n+1}(1,t) = M_n(1,t) - tN_n(1,t) \neq 0$, por lo tanto de (2.17) tenemos el campo

$$\frac{\pi^*X}{x^{n}} = \left[x\left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n}N_k(1,t)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n}\left(M_k(1,t)-t.N_k(1,t)\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\right], \tag{2.21}$$

análogamente, en coordenadas $(s,1)$ tenemos $R_{n+1}(s,1) = s.M_n(s,1) - N_n(s,1) \neq 0$, y de (2.18) se tiene

$$\frac{\pi^*X}{y^{n}} = \left[-\left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n}\left(s.M_k(s,1)-N_k(s,1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial s} + y\left(\sum_{k=n}^{\infty} y^{k-n}M_k(s,1)\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{2.22}$$

Los campos (2.21) y (2.22) los vamos a escribir $\widetilde{X_1}(x,t) = \dfrac{\pi^*X}{x^n}$ y $\widetilde{X_2}(s,y) = \dfrac{\pi^*X}{y^n}$, estos están definidos, respectivamente, en los abiertos $\widetilde{U_0}$ y $\widetilde{U_1}$ de la explosión

$\widetilde{\mathbb{C}_0^2}$. En este caso la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ se representa en el primer abierto por el campo vectorial $\widetilde{X_1}(x,t)$ y en el otro abierto por el campo vectorial $\widetilde{X_2}(s,y)$.

Ejemplo 2.21. La 1-forma $\omega = (2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy$ define la foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$, con $Sing(\mathcal{F}) = \{(0,0)\}$. Al hacer la explosión en el origen de $\mathbb{C}^2$ con el cambio de variable $y = tx$ tendremos $(2x(tx) + (tx)^2)dx + (2x(tx) + x^2)d(tx)$ por lo que $\widetilde{\omega} = (3t^2 + 3t)dx + (2xt + x)dy$ define la foliación $\widetilde{\mathcal{F}} : \widetilde{\omega} = 0$ con $Sing(\widetilde{\mathcal{F}}) = \{(0,0),(0,-1)\}$.

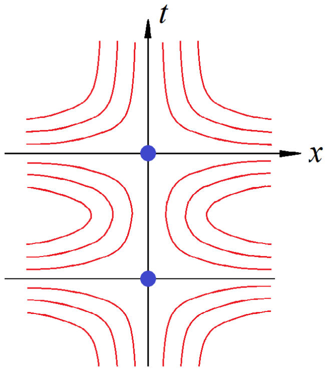

Figura 2.9: Parte real de la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$

Capítulo 3

Extensiones trascendentes

En este capítulo desarrollaremos algunas propiedades y teoremas básicos de las extensiones trascendentes, definiremos lo que es una base de trascendencia y su grado de trascendencia, probaremos que todas las bases de trascendencia de una extensión de cuerpos tienen la misma cardinalidad. Todo ello va dirigido a probar el teorema de Lindemann-Weierstrass, el cual es indispensable en lo que sigue. Para el desarrollo de este capítulo se sigue las referencias [9], [11], [12], [14] y [18].

En el presente capítulo consideraremos el cuerpo E como una extensión del cuerpo F, lo cual será denotado E/F o gráficamente cual

$$\begin{array}{c} E \\ | \\ F. \end{array}$$

Dada una extensión E/F, un elemento $\alpha \in E$ es llamado *algebraico* sobre F, si es raíz de un polinomio con coeficientes en F, en caso contrario, α es llamado *trascendente* sobre F.

Diremos que una extensión de cuerpos E/F es una *extensión trascendente* si existe al menos un elemento $\alpha \in E$ que es trascendente sobre el cuerpo F, en caso contrario, si todos los elementos de E son algebraicos sobre F diremos que la extensión E/F es una *extensión algebraica*.

Ejemplo 3.1.

1) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ es una extensión algebraica, pues todo $\alpha = a+bi \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $X^2 - 2aX + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X]$.

2) $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ es una extensión trascendente, pues $\pi \in \mathbb{C}$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

Sea la extensión E/F. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$, podemos definir un homomorfismo vía

$$\begin{aligned} \Phi : F[X_1, \ldots, X_n] &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \Phi(f) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Si Φ es un monomorfismo, es decir, si $ker(\Phi) = 0$, decimos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son *algebraicamente independientes* sobre F, en caso contrario diremos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son *algebraicamente dependientes* sobre F.

Observación 3.2. Hay cierta relación entre los conjuntos algebraicamente independientes y linealmente independientes. Por ejemplo, si consideramos un polinomio homogéneo de grado 1, la definición de algebraicamente independiente se convierte en la definición de independencia lineal.

Observación 3.3. Sea E/F una extensión de cuerpos. Todo elemento algebraico sobre F es algebraicamente dependiente sobre F, y todo elemento trascendente sobre F es algebraicamente independiente sobre F.

Definición 3.4. Diremos que un conjunto infinito $A \subset E$ es algebraicamente independiente sobre F si cada subconjunto finito de A es algebraicamente independiente sobre F.

Proposición 3.5. *Todos los elementos de un conjunto algebraicamente independiente sobre F son trascendentes sobre F.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset E$ un conjunto algebraicamente independiente sobre F donde algún α_i con $1 \leq i \leq n$, no es trascendente sobre F, es decir, α_i es algebraico sobre F. Sin pérdida de generalidad supongamos que este sea α_1. Entonces existe un polinomio no nulo $g \in F[X_1]$ tal que $g(\alpha_1) = 0$. De $F[X_1] \subset F[X_1, \ldots, X_n]$, se pasa a $0 = g(\alpha_1) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, de donde tenemos que $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es algebraicamente dependiente, lo cual no es cierto. $\square$

Observación 3.6. La recíproca de la proposición anterior es falsa, es decir, elementos trascendentes no necesariamente son algebraicamente independientes entre sí. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.7. Los números complejos $\sqrt{2\pi}$ y π son trascendentes sobre $\mathbb{Q}$ pero son algebraicamente dependientes sobre $\mathbb{Q}$ pues el polinomio definido por $p(X, Y) = X^2 - 2Y$ satisface $p(\sqrt{2\pi}, \pi) = 0$.

Respecto de la observación 3.6, tenemos incluso elementos trascendentes de los cuales aún no se sabe si son algebraicamente independientes. Por ejemplo, es conocido que los números complejos π y e son trascendentes sobre $\mathbb{Q}$, pero no ha sido probado aún que $\{\pi, e\}$ sea algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$.

Observación 3.8. Como aplicación de la proposición 3.5 tenemos que cualquier subconjunto de un conjunto algebraicamente independiente es también algebraicamente independiente.

Proposición 3.9. *Consideremos la torre de extensiones $K \subset F \subset E$. La extensión E/K es una extensión algebraica si y solo si E/F y F/K son extensiones algebraicas. Es decir se tiene*

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, dash, "algebraica"'] \\
F \arrow[d, dash, "algebraica"'] \\
K
\end{tikzcd}
$$

si y solo si se tiene

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dd, dash, "algebraica"'] \arrow[dr, dash] & \\
& F \arrow[dl, dash] \\
K &
\end{tikzcd}
$$

Una prueba de esta propiedad se puede encontrar en [12].

3.1. Base de trascendencia

A continuación definiremos la base de trascendencia de una extensión de cuerpos y enunciaremos y probaremos algunos resultados necesarios para establecer el teorema 3.19.

Definición 3.10. Dada una extensión E/F, un subconjunto $A \subset E$ será llamado *base de trascendencia* de E sobre F si

1) A es algebraicamente independiente sobre F,

2) $E/F(A)$ es una extensión algebraica.

Observación 3.11. Si E/F es una extensión algebraica el conjunto vacío es una base de trascendencia de E sobre F.

Lema 3.12. *Si $E/F(A)$ es extensión algebraica y A es minimal con esta propiedad, entonces A es una base de trascendencia de E sobre F.*

Demostración. Bastará probar que A es algebraicamente independiente sobre F. Supongamos que A no es algebraicamente independiente sobre F, entonces existe un elemento $\alpha \in A$ que es algebraico sobre $F(A - \{\alpha\})$. Por lo tanto $F(A - \{\alpha\})(\alpha)/F(A - \{\alpha\})$ es una extensión algebraica, es decir, $F(A)/F(A - \{\alpha\})$ es una extensión algebraica. Además como $E/F(A)$ es una extensión algebraica, la siguiente torre

$$\begin{array}{c} E \\ {\scriptstyle algebraica}\Big| \\ F(A) \\ {\scriptstyle algebraica}\Big| \\ F(A-\{\alpha\}) \end{array}$$

es algebraica y por la propiedad 3.9 tendremos que la extensión $E/F(A-\{\alpha\})$ también será una extensión algebraica: esto contradice la minimalidad de A. □

Proposición 3.13. *(Propiedad de Intercambio) Consideremos la extensión de cuerpos E/F. Tomemos $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset E$. Si β es algebraico sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ pero no sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$, entonces α_n es algebraico sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta)$.*

Demostración. Llamemos $N=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset E$. Como β es algebraico sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=F(N)$, existe un polinomio no nulo $f\in F(N)[X]$ tal que $f(\beta)=0$, lo cual es equivalente a decir que existe un polinomio $f(X_1,\ldots,X_n,Y)\in F[X_1,\ldots,X_n,Y]$ con el cual se tiene

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,Y)\neq 0 \tag{3.1}$$

y

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta)=0. \tag{3.2}$$

En la práctica podemos escribir f como un polinomio respecto a cualquiera de sus $n+1$ variables, por ejemplo respecto a X_n: es decir, ponemos $f=f(X_1,\ldots,X_n,Y)=f(X_1,\ldots,X_{n-1},Y)(X_n)\in F(X_1,\ldots,X_{n-1},Y)[X_n]$. Con este artificio reexpresamos f como

$$f(X_1,\ldots,X_n,Y)=\sum_{i=0}^{n} g_i(X_1,\ldots,X_{n-1},Y)X_n^i. \tag{3.3}$$

Al evaluar tenemos

$$0\neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,Y)=\sum_{i=0}^{n} g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},Y)\alpha_n^i, \tag{3.4}$$

y concluimos que alguno de los coeficientes $g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},Y)$ es no nulo.

Por otro lado, también tenemos de hipótesis que β no es algebraico sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$. En particular no es raíz de ningún $g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},Y)$. Con ello podemos garantizar que se tiene

$$g_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta)\neq 0. \tag{3.5}$$

Sin embargo, si evaluamos $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta\}$ en (3.3), de (3.5) deducimos

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},X_n,\beta)\neq 0, \tag{3.6}$$

el cual es un polinomio no nulo en la variable X_n. Pero de (3.2) ya teníamos $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta)=0$. Y con ello α_n resulta algebraico sobre $F(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta)$, tal como queríamos demostrar. □

Lema 3.14. *Supongamos que $A \subset E$ sea algebraicamente independiente sobre F, y que $A \bigcup \{\beta\}$ sea algebraicamente dependiente sobre F. Entonces β es algebraico sobre $F(A)$.*

Demostración. La hipótesis indica que existe el polinomio $f \in F[X_1, \ldots, X_n, Y]$ no nulo, tal que $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) = 0$, para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$. Reescribimos f como un polinomio de variable Y cual

$$f = p_m Y^m + p_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + p_1 Y + p_0,$$

donde $p_i \in F[X_1, \ldots, X_n]$. Notamos que para algún p_m este es no nulo. Como A es algebraicamente independiente sobre F tendremos además $p_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. De esta manera β será raíz de

$$f = p_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) Y^m + p_{m-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) Y^{m-1} + \cdots + p_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) Y + p_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Como β es raíz de $f \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[Y] = F(A)[Y]$, resulta algebraico sobre $F(A)$. □

Proposición 3.15. *Todo conjunto algebraicamente independiente sobre F que sea maximal respecto a la inclusión con esta propiedad es una base de trascendencia de E sobre F.*

Demostración. Sea $A \subset E$ conjunto algebraicamente independiente maximal sobre F. De este modo para todo $\alpha \in E \setminus A$ se tiene que $A \bigcup \{\alpha\}$ es algebraicamente dependiente sobre F. Por el lema 3.14 α es algebraico sobre $F(A)$ y con ello $E/F(A)$ es una extensión algebraica y así A es una base de trascendencia de E sobre F. □

En general, gracias al lema de Zorn toda extensión de cuerpos tiene al menos una base de trascendencia. Más aún, todo conjunto algebraicamente independiente está contenido en una base de trascendencia. Los detalles se dan a continuación.

Teorema 3.16. *Toda extensión de cuerpos E/F admite una base de trascendencia.*

Demostración. En el caso que E/F sea una extensión algebraica ya tenemos que el vacío es una base de trascendencia. Analicemos el caso en que E/F es una extensión trascendente. Para la prueba haremos uso del lema de Zorn.

Consideremos $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos algebraicamente independientes sobre F, es claro que $\mathcal{A}$ es un conjunto parcialmente ordenado por inclusión. Además notemos que se cumple $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues dado que E/F es extensión trascendente existe un elemento en E trascendente sobre F y por lo tanto algebraicamente independiente sobre F (observación 3.3).

Sea $\mathcal{T}$ una cadena ascendente en $\mathcal{A}$. Afirmamos que $\mathcal{U}$, la unión de los miembros de $\mathcal{T}$, es algebraicamente independiente sobre F. Si $\mathcal{U}$ no fuese algebraicamente independiente algún subconjunto finito $B \in \mathcal{U}$ no lo sería, pero esto no es posible pues tarde o temprano los elementos de $\mathcal{T}$ incluyen a B.

Por el lema de Zorn existe un elemento maximal en $\mathcal{A}$, es decir, tenemos un conjunto algebraicamente independiente maximal sobre F. Finalmente por la proposición 3.15, tal conjunto es una base de trascendencia de la extensión E/F. □

Del teorema anterior se desprende fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 3.17. *Dada una extensión E/F, todo conjunto algebraicamente independiente sobre F está contenido en una base de trascendencia.* $\square$

Además de manera sencilla se consigue.

Lema 3.18. *Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base de trascendencia de E sobre F entonces $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es base de trascendencia de E sobre $F(\alpha_1)$.* $\square$

El siguiente resultado es el más importante en lo que concierne a las bases de trascendencia.

Teorema 3.19. *Todas las bases de trascendencia de una extensión de cuerpos tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Haremos la prueba al distinguir entre los casos finito e infinito. La cardinalidad de un conjunto X será denotada en adelante $card(X)$.

Caso finito: Sean $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ dos bases de trascendencia finitas de E sobre F, con $m \leq n$.

Haremos la prueba por inducción sobre m. Si $m = 0$ entonces $B = \emptyset$, así es claro que E/F es una extensión algebraica, con lo cual $n = 0$. Si $m > 0$. Como A es base de trascendencia de E sobre F, al agregar un elemento más se volverá algebraicamente dependiente, así $A \cup \{\beta_1\}$ es algebraicamente dependiente sobre F, y con esto es claro que β_1 es algebraico sobre $F(A)$.

Afirmación: Si en A intercambiamos algún α_i por algún $\beta_j \in B$, el nuevo conjunto sigue siendo una base de trascendencia de E sobre F.

En efecto, probemos que $A^* = \{\beta_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$ es base de trascendencia de E sobre F. Garantizamos que A^* es algebraicamente independiente sobre F pues de no serlo habrá un polinomio no nulo $f \in F[y, x_2, \ldots, x_n]$ tal que $f(\beta_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) = 0$, provocando que β_1 sea algebraico sobre $F(\alpha_2 \ldots, \alpha_n)$, lo que haría α_1 algebraico sobre $F(\alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ lo cual no es posible.

Ahora, como β_1 es algebraico sobre $F(A) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pero no sobre $F(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, la propiedad del intercambio dice que α_1 es algebraico sobre $F(\beta_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) = F(A^*)$. De este modo conseguimos la extensión algebraica $F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1)/F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, gráficamente tenemos

$$\begin{array}{c} F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1) \\ \Big| {\scriptstyle algebraica} \\ F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{array} \tag{3.7}$$

Como $E/F(A)$ es una extensión algebraica (pues A es base de trascendencia), consideramos la torre de extensiones

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "algebraica"'] & \\
& F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1) \\
F(A), \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

la proposición 3.9 permite obtener

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, dash, "algebraica"] \\
F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1) \arrow[d, dash, "algebraica"] \\
F(A),
\end{tikzcd}$$

y de este modo $E/F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1)$ es extensión algebraica y con (3.7) logramos la torre

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, dash, "algebraica"] \\
F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\alpha_1) \arrow[d, dash, "algebraica"] \\
F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).
\end{tikzcd}$$

Lo que permite asegurar con toda veracidad que $E/F(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ resulta extensión algebraica. Por lo tanto $A^* = \{\beta_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n\}$ es base de trascendencia de E sobre F.

El lema 3.18 establece que $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $\{\beta_2, \ldots, \beta_m\}$ son bases de trascendencia de E sobre $F(\beta_1)$. Al repetir el mismo proceso hasta reemplazar cada α_i por β_i, por inducción logramos $m = n$.

Caso infinito: Sean A y B bases de trascendencia de la extensión E/F. Notemos primero que basta que una sea infinita para que la otra también lo sea pues, por ejemplo, si consideramos B base infinita, al remedar el caso finito llegamos a $card(A) \geq card(B)$.

Sean $A = \{\alpha_j : j \in \Lambda\}$ y $B = \{\beta_i : i \in I\}$ bases de trascendencia infinitas, probaremos la igualdad $card(A) = card(B)$. Como B es una base de trascendencia, $E/F(B)$ es una extensión algebraica y para todo $\theta \in E$, existe $p \in F[X_1, \ldots, X_{i_\theta}, Y]$ no nulo, tal que, $p(\beta_{1_\theta}, \ldots, \beta_{i_\theta}, \theta) = 0$, donde $\beta_{1_\theta}, \ldots, \beta_{i_\theta} \in B$. En particular para todo $\alpha \in A \subset E$ existirá un conjunto finito $B_\alpha = \{\beta_{1_\alpha}, \ldots, \beta_{i_\alpha}\} \subset B$ y un polinomio no nulo $p \in F[X_1, \ldots, X_{i_\alpha}, Y]$ tal que $p(\beta_{1_\alpha}, \ldots, \beta_{i_\alpha}, \alpha) = 0$, obsérvese que los elementos de B_α dependen de α.

Sea $X = \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ la familia de subconjuntos finitos de B que dependen de los elementos de A. Afirmamos que se cumple $\bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\} = B$. En efecto. La primera inclusión $\bigcup\{B_\alpha/\alpha \in A\} \subset B$ es obvia, para el regreso procedemos por contradicción.

Supongamos que cierto $\beta \in B$ no está en ningún B_α. En tal caso todo $\alpha \in A$ será algebraico sobre $F(B - \{\beta\})$, y tendremos que la extensión $F(A)/F(B - \{\beta\})$ es algebraica. Como A es base de trascendencia $E/F(A)$ es algebraica y así tenemos la torre

$$\begin{array}{c} E \\ \Big|\, {\scriptstyle algebraica} \\ F(A) \\ \Big|\, {\scriptstyle algebraica} \\ F(B - \{\beta\}). \end{array}$$

De este modo por la proposición 3.9 se tendrá que $E/F(B-\{\beta\})$ será una extensión algebraica, lo cual es una contradicción con la minimalidad de B: confirmamos de esta manera la inclusión $B \subset \bigcup\{B_\alpha/\alpha \in A\}$ y con ello la igualdad

$$\bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\} = B. \tag{3.8}$$

Ahora, $X = \{B_\alpha/\alpha \in A\}$ es una familia infinita, pues de lo contrario, como cada B_α es un conjunto finito se tendría que $\bigcup\{B_\alpha/\alpha \in A\}$ sería finito, lo cual es una contradicción con (3.8), ya que B es infinito.

Ahora es cuestión de teoría de conjuntos: de (3.8) tenemos

$$card(B) = card\left(\bigcup\{B_\alpha/\alpha \in A\}\right),$$

y dado que se tiene $card(B_\alpha) \leq card(\mathbb{N})$, concluimos

$$\begin{aligned} card(B) &= card\left(\bigcup\{B_\alpha/\alpha \in A\}\right) = card\left(\bigcup_{B_\alpha \in X} B_\alpha\right) \leq card\left(\bigcup_{B_\alpha \in X} \mathbb{N}\right) \\ &\leq card\,(\mathbb{N} \times X) \leq card\,(\mathbb{N} \times A) = card(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple $card(B) \leq card(A)$. La prueba de $card(A) \leq card(B)$ es análoga a lo anterior. Con esto el teorema queda demostrado. $\square$

3.2. Grado de trascendencia

Toda extensión de cuerpos tiene bases de trascendencia finitas o infinitas cuya cardinalidad es la misma, tal condición es invariante para la extensión. Esta cardinalidad nos será de importancia a lo largo del trabajo.

Definición 3.20. La cardinalidad de la base de trascendencia de una extensión de cuerpos E/F será llamada *grado de trascendencia* de E sobre F y será denotado por $trdeg(E/F)$.

Ejemplo 3.21. Si E/F es una extensión algebraica entonces convenimos que $trdeg(E/F) = 0$. (Pues la base de trascendencia es el conjunto vacío).

Ejemplo 3.22. La extensión $F(X)/F$ con indeterminada X será una extensión trascendente pues obviamente X es trascendente sobre F, acá necesariamente $trdeg(F(X)/F) = 1$.

Ejemplo 3.23. Podemos generalizar el ejemplo anterior. Dada la extensión $F(X_1, \ldots, X_n)/F$, el conjunto de indeterminadas $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es algebraicamente independiente sobre F y será una base de trascendencia, con ello tenemos $trdeg(F(X_1, \ldots, X_n)/F) = n$.

Observación 3.24. Dada una extensión de cuerpos $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/F$, donde el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es algebraicamente independiente sobre F tenemos

$$trdeg(F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/F) = n.$$

En efecto, es fácil comprobar que se tiene un isomorfismo $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cong F(X_1, \ldots, X_n)$ siempre que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sea algebraicamente independiente sobre F.

Prácticamente por definición se consigue lo siguiente.

Lema 3.25. *Toda extensión finitamente generada tiene grado de trascendencia finito.*

3.3. El teorema de Lindemann-Weierstrass

En esta sección probaremos el teorema de Lindemann-Weierstrass el cual nos servirá para obtener un conjunto algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$ a partir de un conjunto de números algebraicos.

Un número complejo será llamado *número algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Un número algebraico será llamado *entero algebraico* si es raíz de un polinomio mónico en los enteros. Un entero algebraico será llamado *entero racional* si es número entero.

Definición 3.26. Sea α un número algebraico con polinomio minimal $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ (polinomio mónico e irreducible de menor grado que acepta a α como raíz). Las otras raíces de $f(X)$ son llamadas los *conjugados* de α.

Proposición 3.27. *Un valor $\alpha \in \mathbb{C}$ es un entero algebraico si y solo si $\mathbb{Z}[\alpha]$ es un $\mathbb{Z}-$módulo finitamente generado.*

Demostración. Si α es un entero algebraico, entonces existe un polinomio mónico $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $f(\alpha) = 0$, con f de grado n, tendremos así

$$a_0 + a_1.\alpha + \cdots + a_{n-1}.\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0,$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Al despejar la ecuación anterior tendremos $\alpha^n = -\left(a_0 + a_1.\alpha + \cdots + a_{n-1}.\alpha^{n-1}\right)$, es decir, la colección $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ generará el anillo $\mathbb{Z}[\alpha]$ como $\mathbb{Z}-$módulo.

Recíprocamente, si $\mathbb{Z}[\alpha]$ es un $\mathbb{Z}-$módulo finitamente generado, entonces tendremos

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}\delta_1 + \cdots + \mathbb{Z}\delta_n,$$

donde $\delta_i \in \mathbb{C}$. Al tenerse $\alpha\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}[\alpha]$, podremos expresar todo elemento de $\alpha\mathbb{Z}[\alpha]$ en función de los δ_i. En particular para $\alpha.\delta_j$ tendremos

$$\alpha.\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_j,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Para la matriz $M = (a_{ij})$ tenemos de este modo

$$M \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix},$$

y α aparece como autovalor de la matriz M que por lo tanto satisfará $det(\alpha.I_n - M) = 0$, y tendremos

$$a_0 + a_1.\alpha + \cdots + a_{n-1}.\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0,$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, concluimos que α es entero algebraico. $\square$

Formalicemos un resultado conocido sobre números y enteros algebraicos.

Teorema 3.28. *Los números algebraicos forman un cuerpo y los enteros algebraicos forman un anillo.*

Demostración. Primero probaremos que los números algebraicos forman un cuerpo. Denotemos por $\mathcal{Q}$ el conjunto de números algebraicos. Dados $a, b \in \mathcal{Q}$ resulta que $\mathbb{Q}(a,b)/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica. Así $\mathbb{Q}(a,b)$ es de hecho el menor cuerpo que contiene a a, b y $\mathbb{Q}$. Obviamente $a+b$ y ab están en $\mathbb{Q}(a,b)$ por ser un cuerpo, por tal motivo son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ y por tanto están en $\mathcal{Q}$. Para $a \neq 0$, de igual manera $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ es extensión algebraica y $a^{-1} \in \mathbb{Q}(a)$, pues es un cuerpo: concluimos que es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y por tanto está en $\mathcal{Q}$.

Ahora probaremos que los enteros algebraicos forman un anillo. Denotemos por $\mathcal{Z}$ el conjunto de enteros algebraicos. Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{Z}$, por la proposición 3.27 el anillo $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ es finitamente generado como $\mathbb{Z}-$módulo. Como se tiene $\mathbb{Z}[\alpha + \beta] \subset \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ nuevamente de la proposición 3.27 se desprende que $\alpha + \beta$ es entero algebraico. Análogamente, de $\mathbb{Z}[\alpha.\beta] \subset \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ se sigue que $\alpha.\beta$ es entero algebraico. Por lo tanto $\mathcal{Z}$ es anillo: obviamente 1, un entero algebraico, es la identidad del anillo. $\square$

Teorema 3.29. *Si α es un número racional que es un entero algebraico, entonces α es un entero racional.*

Demostración. Escribimos $\alpha = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, tal que $mcd(a, b) = 1$. Dado que α es un entero algebraico, será raíz de un polinomio mónico $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$. Al reemplazar tendremos

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = c_0 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + \cdots + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0,$$

y al reescribir la función, despejar a^n conduce a

$$a^n = -b(c_0b^{n-1} + c_1ab^{n-2} + \cdots + c_{n-1}a^{n-1}),$$

y de este modo $b|a^n$, esto es imposible salvo cuando $b = 1$. Por lo tanto $\alpha = a \in \mathbb{Z}$ es un entero racional. □

Teorema 3.30. *Si α es un número algebraico, entonces existe un entero racional positivo d tal que αd es un entero algebraico.*

Demostración. Supongamos que α sea raíz de $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$, con $c_n \neq 0$. Podemos suponer $c_n > 0$ pues de no serlo simplemente trabajamos con $-f(x)$. Como todos los $c_i \in \mathbb{Q}$ son de la forma $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, con $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, consideremos $N = mcm(q_0, \ldots, q_n)$. Al multiplicar con $f(x)$ tendremos un polinomio con coeficientes enteros, específicamente

$$N.f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x],$$

donde $a_i = N.c_i \in \mathbb{Z}$. Así, un poco de manipulación lleva a

$$\begin{aligned} a_n^{n-1}.N.f(x) &= a_0a_n^{n-1} + a_1a_n^{n-1}x + \cdots + a_na_n^{n-1}x^n \\ &= a_0a_n^{n-1}(a_nx)^0 + a_1a_n^{n-2}(a_nx)^1 + \cdots + a_{n-1}a_n^0(a_nx)^{n-1} + a_na_n^{-1}(a_nx)^n. \end{aligned}$$

Si evaluamos en α tenemos

$$a_n^{n-1}.N.f(\alpha) = a_0a_n^{n-1}(a_n\alpha)^0 + a_1a_n^{n-2}(a_n\alpha)^1 + \cdots + a_{n-1}a_n^0(a_n\alpha)^{n-1} + (a_n\alpha)^n = 0.$$

Si hacemos $x = a_n\alpha$ y además reemplazamos los coeficientes por $b_i = a_ia_n^{n-1-i}$, para $i = 0, 1, \ldots n$ y el polinomio $g(x) = a_n^{n-1}Nf(\frac{x}{a_n})$, tendrá la forma

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

un polinomio mónico con raíz $a_n\alpha$. Por lo tanto con $d = a_n$ resulta que $d\alpha$ es entero algebraico.

□

Observación 3.31. El menor d positivo con el cual el teorema anterior es válido es llamado el *denominador de α*.

Corolario 3.32. *Sea $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ una familia de números algebraicos. Entonces existe un entero racional positivo d tal que todos los $d\alpha_i$ son enteros algebraicos.*

Demostración. Análogo al teorema anterior donde d será el producto de coeficientes principales de polinomios en los enteros con raíces α_i. □

Teorema 3.33. *Sean $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x], i = 1, \ldots, r$, polinomios irreducibles no constantes de grado k_i. Sean para cada $f_i(x)$ los valores $\beta_{1i}, \ldots, \beta_{k_i i}$ sus correspondientes raíces. Asumamos que no son nulas. Tomemos $a_0, a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Z}$ con $a_0 \neq 0$. Entonces el número*

$$a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} e^{\beta_{ki}}$$

es no nulo.

Demostración. Haremos un esbozo de la prueba, para ver detalles puntuales de la misma referimos al lector a [11, pág 110].

La prueba se hará por contradicción. Supongamos que se tenga

$$a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} e^{\beta_{ki}} = 0. \tag{3.9}$$

La idea detrás es encontrar un número $M_0 \in \mathbb{Z}$ no nulo que dependa de un número primo p, tal que al multiplicar M_0 por (3.9) podamos expresar dicho producto como la suma de 3 términos; por su aspecto, se concluirá que dichos sumandos no pueden anularse.

Definamos

$$M_0 = \int_0^{+\infty} \frac{b_N^{(N-1)p-1} t^{p-1} f^p(t) e^{-t}}{(p-1)!} dt, \tag{3.10}$$

donde el polinomio $f(t)$ está dado por

$$f(t) = \prod_{i=1}^{r} f_i(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_N t^N = b_N \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{k_i} (t - \beta_{ki}); \tag{3.11}$$

como cada $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$, resulta $f(t) \in \mathbb{Z}[x]$, claramente de grado $N = \sum_{i=1}^{r} k_i$.

Analicemos M_0 y verifiquemos que efectivamente está en $\mathbb{Z}$. Primero notemos la validez de la expresión

$$\begin{aligned} b_N^{(N-1)p-1} t^{p-1} f^p(t) &= b_N^{(N-1)p-1} t^{p-1} \left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_N t^N\right)^p \\ &= b_N^{(N-1)p-1} b_0^p t^{p-1} + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} t^{s-1}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde los valores $c_s \in \mathbb{Z}$ son los coeficientes (salvo el término independiente) de la expansión de $\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_N t^N\right)^p$ multiplicados por $b_N^{(N-1)p-1}$. Así si reemplazamos (3.12) en M_0 (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{b_N^{(N-1)p-1}b_0^p}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p}\frac{c_{s-1}}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{b_N^{(N-1)p-1}b_0^p}{(p-1)!}\Gamma(p) + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p}\frac{c_{s-1}}{(p-1)!}\Gamma(s) \\ &= b_N^{(N-1)p-1}b_0^p + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p}\frac{(s-1)!}{(p-1)!}c_{s-1} \\ &= b_N^{(N-1)p-1}b_0^p + pC, \end{aligned} \tag{3.13}$$

para algún $C \in \mathbb{Z}$ (acá Γ es la función gamma). Por lo tanto, tenemos $M_0 = b_N^{(N-1)p-1}b_0^p + pC$, con lo cual efectivamente comprobamos que M_0 es un entero.

Similarmente, definamos

$$M_{ki} = e^{\beta_{ki}}\int_{\beta_{ki}}^{+\infty}\frac{b_N^{(N-1)p-1}t^{p-1}f^p(t)e^{-t}}{(p-1)!}dt \tag{3.14}$$

y

$$\epsilon_{ki} = e^{\beta_{ki}}\int_0^{\beta_{ki}}\frac{b_N^{(N-1)p-1}t^{p-1}f^p(t)e^{-t}}{(p-1)!}dt, \tag{3.15}$$

donde $k = 1, \ldots, k_i$, $i = 1, \ldots, r$. Una integral de Cauchy nos ayudará a establecer la finititud de M_{ki}. A continuación al sumarle ϵ_{ki} obtenemos la identidad

$$M_{ki} + \epsilon_{ki} = e^{\beta_{ki}}M_0. \tag{3.16}$$

En la expresión (3.9), si multiplicamos por M_0 obtenemos

$$a_0M_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i}\left(e^{\beta_{ki}}M_0\right) = 0. \tag{3.17}$$

De ahí al reemplazar (3.16) conseguimos

$$a_0M_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} M_{ki} + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i}\epsilon_{ki} = 0. \tag{3.18}$$

Ahora analizaremos cada término por separado.

En (3.13) notemos que para cualquier número primo p mayor que $|a_0|$, $|b_0|$ y b_N se tendrá

$$p \nmid a_0M_0. \tag{3.19}$$

Por otra parte, si para calcular M_{ki} hacemos el cambio de variable $t = u + \beta_{k_i}$ en la integral, tras unos cálculos conseguiremos

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} M_{ki} = pA, \tag{3.20}$$

para algún $A \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto p divide a

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} M_{ki} \right).$$

Por su parte, cálculos sobre $|\epsilon_{ki}|$ para un p suficientemente grande arrojan la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k=1}^{k_i} \epsilon_{ki} \right| < 1. \tag{3.21}$$

Finalmente, al poner juntos (3.19), (3.20) y (3.21) tenemos una contradicción con (3.18), pues los dos primeros sumandos resulta un entero no divisible por p, además de que el tercer sumando tiene módulo menor que 1, por lo tanto es imposible que dicha suma se anule. Concluimos que no se cumple (3.18).

Con esto el teorema queda demostrado. $\square$

A continuación enunciamos y demostramos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.34. *(Teorema de Lindemann-Weierstrass) Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos distintos, entonces $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son linealmente independientes sobre el cuerpo de los números algebraicos.*

Demostración. Notemos que afirmar que $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son linealmente independientes sobre el cuerpo de los números algebraicos significa que para cualquier $a_1, \ldots, a_n$ números algebraicos no nulos se tendrá

$$a_1 e^{\alpha_1} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Haremos la prueba por contradicción. Al suponer

$$a_1 e^{\alpha_1} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} = 0, \tag{3.22}$$

tras multiplicar por el denominador adecuado incluso podemos suponer que los a_i son enteros algebraicos.

Agrupemos los conjugados de a_i como $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{ki}}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dado el polinomio $F_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n$. Si evaluamos $y_1 = a_1$ y hacemos el producto de recorrer a_1 por todos sus conjugados $(a_1 = a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots, a_{1_{k1}})$ tendremos un expresión tipo

$$F_2(y_2, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{k1} F_1(a_{1_i}, y_2, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n).$$

En la expresión anterior evaluamos $y_2 = a_2$ y similarmente tomamos el producto de recorrer a_2 por todos sus conjugados $(a_2 = a_{2_1}, a_{2_2}, \ldots, a_{2_{k2}})$ para llegar a

$$F_3(y_3, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{k2} F_2(a_{2_i}, y_3, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n).$$

El mismo procedimiento de hacer el producto de recorrer a_i por sus respectivos conjugados conduce a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{i=1}^{kn} F_n(a_{n_i},x_1,\dots,x_n) \\ &= \prod_{i_1=1}^{k1}\prod_{i_2=1}^{k2}\dots\prod_{i_n=1}^{kn}(a_{1_{i_1}}x_1+\dots+a_{n_{i_n}}x_n) \\ &= \sum a_{j_1\cdots j_n}x_1^{j_1}\dots x_n^{j_n}. \end{aligned}$$

Este polinomio tiene coeficientes enteros pues si consideramos una extensión finita de Galois E de $\mathbb{Q}$ que contenga todos los a_i (y de pasada sus respectivos conjugados) todo automorfismo de E permutará los $a_{i_1},\dots,a_{i_{ki}},(i=1,\dots,n)$, y así este polinomio quedará invariante, por lo tanto concluimos que los coeficientes $a_{j_1\dots j_n}$ son números racionales, además por ser enteros algebraicos tenemos que $a_{j_1\dots j_n}$ son números enteros.

Si evaluamos en F_{n+1} cada $x_i=e^{\alpha_i}$ tendremos

$$F_{n+1}(e^{\alpha_1},\dots,e^{\alpha_n})=\prod_{i_1=1}^{k1}\dots\prod_{i_n=1}^{kn}(a_{1_{i_1}}e^{\alpha_1}+\dots+a_{n_{i_n}}e^{\alpha_n})=\sum a_{j_1\dots j_n}e^{\sum j_i\alpha_i}=0.$$

El producto es cero pues (3.22) aparece como un factor. Si aquí ponemos $b_i=a_{j_1\dots j_n}$ y $\lambda_i=\sum j_i\alpha_i$ tendremos $\sum b_ie^{\lambda_i}=0$. La cual es una expresión como la inicial aunque con coeficientes enteros.

De ahora en adelante asumimos en (3.22) que los a_i son números enteros.

Sea $P_i(x)\in\mathbb{Q}[x]$ el polinomio minimal de α_i para cada $i=1,\dots,n$, y pongamos $f(x)=\prod_{i=1}^n P_i(x)\in\mathbb{Q}[x]$, obviamente se tiene $m=grad(f)\geq n$. Ahora sean $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ las raíces de f (tendremos $\alpha_i\in\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$).

Definamos $F(x_1,\dots,x_n)=a_1e^{x_1}+\dots+a_ne^{x_n}$. Hagamos el producto de evaluar en F todas las $n-$tuplas de combinaciones posibles de las raíces de f sin repetirse. Es decir en F evaluamos $\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_n}$ para $i=1,\dots,m$, del cual obtenemos

$$\prod(a_1e^{\gamma_{i_1}}+\dots+a_ne^{\gamma_{i_n}})=0, \tag{3.23}$$

acá el producto vale cero pues (3.22) aparece como factor. Si ahora definimos $G(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ y similar a lo anterior tomamos el producto de todas las $n-$tuplas de combinaciones posibles de m variables sin repetirse, entonces conseguimos

$$\prod(a_1x_{i_1}+\dots+a_nx_{i_n})=\sum A_{h_1,\dots,h_m}x_1^{h_1}\dots x_m^{h_m}, \tag{3.24}$$

en este polinomio los coeficientes $A_{h_1,\dots,h_m}$ son enteros que dependen y son invariantes por permutaciones de las $m-$tuplas $(h_1,\dots,h_m)$. En (3.24) ahora podemos agrupar y expresar la sumatoria cual

$$\prod(a_1x_{i_1}+\cdots+a_nx_{i_n})=\sum_{k=1}^{q}A_k\sum x_{k_1}^{h_{k_1}}\dots x_{k_m}^{h_{k_m}}. \tag{3.25}$$

Notemos que la segunda sumatoria varía en un conjunto P_k de permutaciones $(k_1,\dots,k_m)$ de $(1,..,m)$, que dan lugar, sin repeticiones, a todos los monomios posibles $x_{k_1}^{h_{k_1}}\dots x_{k_m}^{h_{k_m}}$. Si evaluamos las exponenciales obtenemos

$$\prod(a_1e^{\gamma_{i_1}}+\cdots+a_ne^{\gamma_{i_n}})=\sum_{k=1}^{q}A_k\sum e^{h_{k1}\gamma_{k1}+\cdots+h_{km}\gamma_{km}}=0. \tag{3.26}$$

Definamos el polinomio $\prod(x-(h_{k1}x_{k1}+\cdots+h_{km}x_{km}))$. La definición del conjunto P_k hace que este polinomio sea invariante por permutaciones de $x_1,\dots,x_m$, por ello al evaluar tenemos $F_k(x)=\prod(x-(h_{k1}\gamma_{k1}+\cdots+h_{km}\gamma_{km}))\in\mathbb{Q}[x]$. Sean $\beta_{1k},\dots,\beta_{t_kk}$ las raíces de $F_k(x)$ contadas con su respectiva multiplicidad. Entonces la igualdad (3.26) se puede expresar como

$$\prod(a_1e^{\gamma_{i_1}}+\cdots+a_ne^{\gamma_{i_n}})=\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}}=\sum_{k=1}^{q}A_k(e^{\beta_{1k}}+\cdots+e^{\beta_{t_kk}})=0. \tag{3.27}$$

Se presentan dos casos.

Podría ocurrir que algún β_{jk} sea cero, por ejemplo $k=1$; de ser así la ecuación (3.27) quedaría

$$\tilde{A}_1+\sum_{k=2}^{q}A_k(e^{\beta_{1k}}+\cdots+e^{\beta_{t_kk}})=0$$

donde $\tilde{A}_1=A_1.t_1\in\mathbb{Z}$, igualdad que entra en conflicto con el teorema 3.33.

O podría ser que todos los β_{jk} sean no nulos: en esta situación procedemos de la siguiente manera. Dividimos (3.27) entre $e^{\beta_{t1}}$ para $t=1,\dots,t_1$, y así obtenemos

$$\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}-\beta_{t1}}=0.$$

Al sumar estos t_1- términos tenemos

$$\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}-\beta_{11}}+\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}-\beta_{21}}+\cdots+\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}-\beta_{t_11}}=0,$$

al reducir la expresión anterior queda

$$\sum_{k=1}^{q}A_k\sum_{t=1}^{t_1}\sum_{j=1}^{t_k}e^{\beta_{jk}-\beta_{t1}}=0.$$

Para $k=1$, aquellos sumandos con $t=j$ claramente valen 1. Con esto, un simple cálculo nos permite expresar la igualdad cual

$$t_1 A_1 + A_1 \sum_{t\neq j} e^{\beta_{jk}-\beta_{t1}} + \sum_{k=2}^{q} A_k \sum_{t=1}^{t_1}\sum_{j=1}^{t_k} e^{\beta_{jk}-\beta_{t1}} = 0. \tag{3.28}$$

Definamos el polinomio $g_1(x) = \prod_{t\neq j}(x-(\beta_{j1}-\beta_{t1}))$ el cual es invariante por permutaciones de los conjugados β_{t1}, y por ende tiene coeficientes racionales. De igual manera, ocurre lo mismo con los polinomios $g_k(x) = \prod_{k=1}^{t_1}\prod_{j=1}^{t_k}(x-(\beta_{jk}-\beta_{t1}))$ para $k=2,\ldots,q$. Además, todos tienen raíces no nulas. Si ponemos $A_0 = t_1A_1$, $r_1 = t_1(t_1-1)$, $r_k = t_1t_k$, para $k=2,\ldots,q$ y llamamos $\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{r_kk}$ a las raíces de $g_k(x)$, la ecuación (3.28) adquiere la forma

$$A_0 + \sum_{k=1}^{q} A_k \sum_{l=1}^{r_i} e^{\alpha_{lk}} = 0,$$

lo que al igual que el caso anterior representa una contradicción con el teorema 3.33.

En resumen, en la ecuación inicial (3.22) tendremos

$$a_1e^{\alpha_1} + \cdots + a_ne^{\alpha_n} \neq 0,$$

como se quería demostrar, por lo que el teorema queda demostrado. □

Del teorema de Lindemann-Weierstrass concluimos varios fenómenos interesantes.

Corolario 3.35. *Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Definamos el polinomio no nulo $P(X_1,\ldots,X_n)\in\mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ de grado k mediante

$$P(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{k} a_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}.$$

Al evaluar las exponenciales tendremos

$$P\left(e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}\right) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{k} a_{i_1\ldots i_n} e^{i_1.\alpha_1}\ldots e^{i_n.\alpha_n} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{k} a_{i_1\ldots i_n} e^{i_1.\alpha_1+\ldots+i_n.\alpha_n}.$$

Para simplificar la expresión denotamos $\tilde{a}_j = a_{i_1\ldots i_n}$ y $\tilde{\alpha}_j = i_1.\alpha_1+\ldots+i_n.\alpha_n$ donde $j=0,1,\ldots,r$, para algún $r\in\mathbb{N}$. Además, dado que los $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ tendremos que cada $\tilde{\alpha}_j$ será también un número algebraico no nulo. Por lo tanto tendremos

$$P(e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}) = \sum_{j=0}^{r} \tilde{a}_j e^{\tilde{\alpha}_j}.$$

El teorema de Lindemann-Weierstrass garantiza que se satisfará $\sum_{j=0}^{r} \tilde{a}_j e^{\tilde{\alpha}_j} \neq 0$ y por lo tanto también

$$P(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) \neq 0.$$

Es decir, $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$. $\square$

La importancia de este corolario, obtenido a partir del teorema de Lindemann-Weierstrass, radica en que podemos encontrar un conjunto algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$, lo cual no es algo sencillo de efectuar, a partir de una condición sencilla sobre números algebraicos.

Dado que hemos conseguido un conjunto algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$, podemos generar una extensión de cuerpos sobre $\mathbb{Q}$. Además sabemos que existirá una base de trascendencia sobre esta extensión (teorema 3.16) lo cual nos invita a perseguir su grado de trascendencia, lo cual será sencillo dado el siguiente corolario.

Corolario 3.36. *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algebraicos distintos que sean linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces se cumple*

$$trdeg\,(\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})/\mathbb{Q}) = n.$$

Demostración. Dado que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos distintos, el corolario 3.35 garantiza que $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$. A partir de ellos podemos generar la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})/\mathbb{Q}$ y la observación 3.24 permite concluir

$$trdeg\,(\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})/\mathbb{Q}) = n.$$

$\square$

Notemos del corolario anterior que el grado de trascendencia de una extensión de cuerpos con las condiciones dadas anteriormente está directamente relacionado con la cantidad de números algebraicos con que trabajemos. Este corolario nos será de utilidad en la demostración del problema principal de la tesis a darse luego.

Ejemplo 3.37. Los números algebraicos $i, \sqrt{5} \in \mathbb{C}$ claramente son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, pues de lo contrario tendríamos

$$a.i + b.\sqrt{5} = 0,$$

donde $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

El corolario 3.36 asegura de este modo la igualdad

$$trdeg\left(\mathbb{Q}(e^{i}, e^{\sqrt{5}})/\mathbb{Q}\right) = 2.$$

Capítulo 4

Clasificación formal de un campo vectorial genérico en $(\mathbb{C}^2, 0)$

En este capítulo vemos la equivalencia entre campos vectoriales sobre $\mathcal{V}_n$, la clase de gérmenes de campos vectoriales holomorfos no dicríticos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con el $(n-1)-jet$ que se anula en el origen pero con $n-jet$ que no se anula, con $n \geq 2$. Luego enunciamos el teorema de la clasificación formal. Dicho teorema proporcionará la herramienta fundamental para la prueba del objetivo final de la tesis. Para el desarrollo de este capítulo se sigue las referencias [1] y [15].

4.1. Forma normal

Dado un objeto matemático X, una *forma normal* de X es una expresión "más simple"de entre todas la expresiones equivalentes a tal objeto. Tal forma se obtiene mediante la aplicación de transformaciones (cambios de coordenadas), cuyo fin es eliminar los términos no esenciales pero asimismo conservar las principales propiedades del objeto inicial.

Definición 4.1. Dados dos campos vectoriales holomorfos X y $\tilde{X}$, diremos que son *formalmente (analíticamente) equivalentes*, si existe un cambio de coordenadas formal (analítico) H, tal que, $\tilde{X} = H_*X$.

El estudio clásico de formas normales de Poincaré es aplicado a campos vectoriales holomorfos con parte lineal no nula. Enunciamos 2 ejemplos clásicos.

Consideremos un campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$, con parte lineal no nula

$$X = \left(\lambda_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda_2 y + \sum_{k=2}^{\infty} Q_k\right) \frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.1}$$

tal que $\lambda_i \neq 0$. Sujetos a ciertas condiciones para λ_1 y λ_2, se puede obtener la forma normal del campo X, veamos.

Teorema 4.2. *(Poincaré) Si* $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{C} - \left(\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{N}^* \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}^*}\right)$*, entonces el campo (4.1) es formalmente equivalente a un campo vectorial holomorfo de la forma*

$$\tilde{X} = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y},$$

es más, la equivalencia es analítica cuando $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$.

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [16].

Teorema 4.3. *(Dulac) Si* $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}^*$*, entonces el campo (4.1) es analíticamente equivalente a un campo vectorial holomorfo de la forma*

$$\tilde{X} = (kx + ay^k)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

donde $k = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *y* $a \in \mathbb{C}$.

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [7].

En los teoremas anteriores, los campos $\tilde{X}$ son la forma normal para el campo vectorial holomorfo X (4.1) bajo las condiciones de cada caso.

En la siguiente sección estudiaremos la forma normal de un campo holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con parte lineal nula bajo ciertas condiciones genéricas particulares.

4.2. Equivalencia de campos vectoriales

Sea $\mathcal{V}_n$ la clase de gérmenes de campos vectoriales holomorfos no dicríticos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada en el origen con el $(n-1)-jet$ que se anula en el origen pero con $n-jet$ que no se anula; acá $n \geq 2$.

Para $v \in \mathcal{V}_n$, se tiene

$$v = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y},$$

con $P = \sum_{k=n}^{\infty} P_k$ y $Q = \sum_{k=n}^{\infty} Q_k$, donde P_k y Q_k son polinomios homogéneos en (x, y) de grado $k \geq n$, (con P_n o Q_n no nulos), que corresponden a los términos de orden k de su expansión de Taylor en el origen, y con cono tangente $R_{n+1}(v) = xQ_n - yP_n$ no nulo.

Definición 4.4. (Equivalencia orbital) Dos gérmenes $v, w \in \mathcal{V}_n$ son llamados *orbitalmente equivalentes* si existe un cambio local de coordenadas $H : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow$

$(\mathbb{C}^2, 0)$, sujeto a $det(D_0H) \neq 0$ y un germen invertible $K : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $K(0) \neq 0$, tal que se cumple $w = K.H_*v$; recuérdese que acá se tiene

$$H_*v(p) = (DH.v) \circ H^{-1}(p). \tag{4.2}$$

En particular, si H y K son series formales (gérmenes holomorfos) diremos que v y w son *formal (analítica) orbitalmente equivalentes.*

Las foliaciones $\mathcal{F}_v$ y $\mathcal{F}_w$ generadas por los gérmenes de los campos vectoriales $v, w \in \mathcal{V}_n$, respectivamente, son llamadas *foliaciones formalmente (analíticamente) equivalentes* si v y w son formal (analítica) orbitalmente equivalentes.

Si $\mathcal{F}_v$ y $\mathcal{F}_w$ son foliaciones analíticamente equivalentes y si $h_{v,(x,y)}$ denota a las hojas de la foliación $\mathcal{F}_v$ entonces $h_{w,H(x,y)} = H(h_{v,(x,y)})$, es decir, H envía las hojas de $\mathcal{F}_v$ en las hojas de $\mathcal{F}_w$.

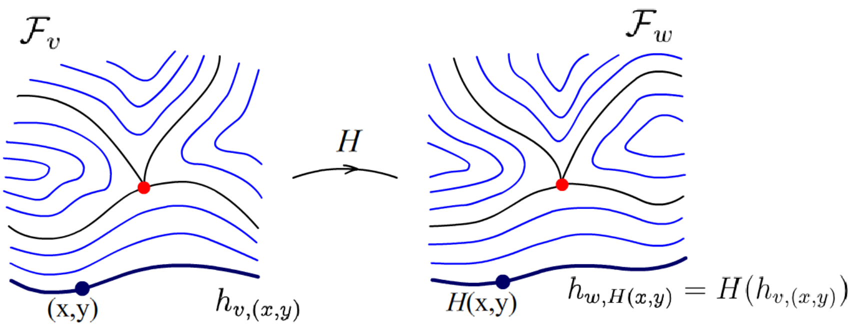

Figura 4.1: Equivalencia analítica de $\mathcal{F}_v$ y $\mathcal{F}_w$

Definición 4.5. (Equivalencia orbital estricta) Dados $v, w \in \mathcal{V}_n$, diremos que ellos son *estricta formal (analítica) orbitalmente equivalentes* si en la definición anterior H y K cumplen las siguientes condiciones: la parte lineal de H es la identidad (es decir, $D_0H = Id$) y se tiene $K(0) = 1$.

Las foliaciones $\mathcal{F}_v$ y $\mathcal{F}_w$ generadas por estos gérmenes son llamadas *foliaciones estricta formalmente (analíticamente) equivalentes.*

Cualquier germen genérico no dicrítico $v \in \mathcal{V}_n$ puede reducirse bajo rotación y rectificación de una de sus separatrices a un germen

$$P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}, \quad P(0, y) \equiv 0, \tag{4.3}$$

ello se estudiará más adelante, en el lema 5.21.

Denotaremos $\mathcal{V}_n^0$ a la subclase de gérmenes en $\mathcal{V}_n$ que satisfacen la condición (4.3).

Podemos extender resultados obtenidos por gérmenes equivalentes estrictos al caso no estricto, aunque es oportuno resaltar que trabajar con gérmenes equivalentes no estrictos a menudo conduce a expresiones de cambios complicados. Debido a ello se trabajará con gérmenes en $\mathcal{V}_n^0$ que cumplan la equivalencia orbital estricta.

Observación 4.6. Gérmenes estrictos formales (y analíticos) orbitalmente equivalentes en $\mathcal{V}_n^0$ tienen el mismo $n-jet$ en el origen.

Ello puede verse de la siguiente manera. Sean $v, w \in \mathcal{V}_n^0$ gérmenes estrictos formal (analítica) orbitalmente equivalentes, donde

$$v = \left(\sum_{l=n}^{\infty} P_l\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{l=n}^{\infty} Q_l\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

tal que P_l y Q_l son polinomios homogéneos de grado $l \geq n$. Algunas veces al referirnos a campos vectoriales trabajaremos con las componentes del campo, solo por la simplicidad en la escritura para efectuar cálculos, en este caso en concreto escribiremos v cual

$$v = \left(\sum_{l=n}^{\infty} P_l, \sum_{l=n}^{\infty} Q_l\right).$$

Notemos que el $n-jet$ de v es

$$J^n_{(0,0)}(v) = P_n(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_n(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.4}$$

Debido a la equivalencia entre v y w existe un cambio de coordenadas formal (analítico) H y una serie formal (función analítica) K, tal que se satisface $w = K.H_*v$. Además como la equivalencia es estricta, la parte lineal de H es la identidad (es decir, $D_0H = Id$). Al juntar todo esto tenemos

$$H(x,y) = (H_1(x,y), H_2(x,y)) = (s,t),$$

donde

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= x + \sum_{i+j\geq 2} a_{ij}x^iy^j \\ &= x + \sum_{k=2}^{\infty} R_k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H_2(x,y) &= y + \sum_{i+j\geq 2} b_{ij}x^iy^j \\ &= y + \sum_{k=2}^{\infty} S_k, \end{aligned}$$

donde $R_k(x,y) = a_{ij}x^iy^j$ y $S_k(x,y) = b_{ij}x^iy^j$, para $i+j=k$, son polinomios homogéneos de grado $k \geq 2$. Así, de manera casi directa, obtenemos

$$DH = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} R'_{k,x} & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} R'_{k,y} \\ \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} S'_{k,x} & 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} S'_{k,y} \end{pmatrix}.$$

También notemos que cumple

$$H^{-1}(s,t) = (x,y). \tag{4.5}$$

Al tenerse $K(0) = 1$, por definición de equivalencia estricta, pasamos a

$$K(x,y) = 1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij} x^i y^j. \tag{4.6}$$

Por otro lado, la igualdad (4.2) lleva a

$$\begin{aligned} H_* v &= (DH.v) \circ H^{-1} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} R'_{k,x} & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} R'_{k,y} \\ \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} S'_{k,x} & 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} S'_{k,y} \end{pmatrix} . \left(\sum_{l=n}^{\infty} P_l, \sum_{l=n}^{\infty} Q_l \right) \right) \circ \left(H_1^{-1}, H_2^{-1} \right) \\ &= \left(P_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k \quad , \quad Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \right) \circ \left(H_1^{-1}, H_2^{-1} \right), \end{aligned}$$

donde T_k es combinación elemental de sumas y productos de $R'_{k,x}$, P_l, $R'_{k,y}$ y Q_l y, análogamente, U_k es combinación de sumas y productos de $S'_{k,x}$, P_l, $S'_{k,y}$ y Q_l; de modo que ambos son polinomios homogéneos de grado $k \geq n+1$. Por tanto se consigue

$$H_* v(s,t) = \begin{pmatrix} P_n(H_1^{-1}(s,t), H_2^{-1}(s,t)) + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(H_1^{-1}(s,t), H_2^{-1}(s,t)) \\ Q_n(H_1^{-1}(s,t), H_2^{-1}(s,t)) + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(H_1^{-1}(s,t), H_2^{-1}(s,t)) \end{pmatrix},$$

de donde en uso de (4.5) terminamos en

$$H_* v(s,t) = \left(P_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(x,y) \quad , \quad Q_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x,y) \right), \tag{4.7}$$

acá x e y están en función a las variables s,t. Ahora, de $w = K.H_* v$, se pasa en complicidad con (4.7) a

$$w = K. \left(P_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(x,y) \quad , \quad Q_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x,y) \right),$$

y de (4.6), al reemplazar K y multiplicar y ordenar los términos homogéneos de cada componente tendremos la expresión

$$w = \left(P_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{T}_k(x,y) \quad , \quad Q_n(x,y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{U}_k(x,y) \right), \tag{4.8}$$

donde $\tilde{T}_k$ son sumas y productos de P_k, T_k, $K.P_k$ y $K.T_k$, análogamente $\tilde{U}_k$ es suma y productos de Q_k, U_k, $K.Q_k$ y $K.U_k$, de tal manera que al final $\tilde{T}_k$ y $\tilde{U}_k$ son polinomios homogéneos de grado $k \geq n+1$.

Finalmente, de (4.8) concluimos que el $n-jet$ de w en el origen está dado por

$$J_0^n(w) = P_n(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q_n(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

el cual, por (4.4) resulta igual al $n-jet$ de v en el origen.

Debido a la observación 4.6, el problema de la clasificación orbital formal (analítica) estricta de los gérmenes en $\mathcal{V}_n^0$ se transforma en la clasificación orbital formal (analítica) estricta de los gérmenes en la clase

$$\mathcal{V}(v_0) = \left\{ v \in \mathcal{V}_n^0 : J_0^n(v - v_0) = 0 \right\},$$

donde

$$v_0 = P_n\frac{\partial}{\partial x} + Q_n\frac{\partial}{\partial y}$$

es la *parte principal de* v, y P_n y Q_n son polinomios homogéneos de grado n y además se tiene $P_n(0,y) \equiv 0$. Tengamos en cuenta que la explosión $\tilde{v}$ de v tiene un punto singular p_∞ en el infinito, es decir, en $u = 0$, $y = 0$ donde $u = \dfrac{y}{x}$.

En el caso que la parte principal v_0 sea tal que su explosión admita puntos singulares simples, es decir, que el polinomio homogéneo $R_{n+1}(x,y) = x\widehat{R}(x,y)$ de grado $n+1$ tenga solo factores simples, se cumple en este caso que $R_{n+1}(1,u)$ tiene n raíces simples u_j, $j = 1, \ldots, n$, donde el punto en el infinito también es simple.

Definición 4.7. Diremos que la parte principal v_0 pertence a la clase $\Sigma_{1,n}^{hom}$ si el grado del polinomio $r(u) = R_{n+1}(1,u)$ es n y todas sus raíces u_i, $i = 1, \ldots, n$, son simples. Escribiremos $p(u) = P_n(1,u)$.

4.3. Teorema de clasificación formal

La importancia del teorema de clasificación formal radica en que a partir de un germen genérico (eso sí, que cumpla ciertas condiciones particulares) se puede obtener un germen formal orbitalmente equivalente al inicial y que además esté en forma normal.

Como requisito pedimos que los gérmenes de campos vectoriales holomorfos satisfagan las siguientes condiciones.

Definición 4.8. (Condiciones de genericidad)

1) La parte principal v_0 de $v \in \mathcal{V}_n^0$ pertenece a la clase $\Sigma_{1,n}^{hom}$.

2) Los residuos $\lambda_j = res_{u_j}\dfrac{p(u)}{r(u)}$, para $j = 1, \ldots, n$ y $\lambda_\infty = -1 - res_\infty \dfrac{p(u)}{r(u)}$ no son números racionales.

Para los gérmenes genéricos v_0, la solución al problema de clasificación orbital formal está dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *(Teorema de clasificación formal) Cada germen genérico $v \in \mathcal{V}(v_0)$, $n \geq 2$, es estricto formal orbitalmente equivalente a un único germen formal $v_{c,b}$ de la forma*

$$v_{c,b} = v_0 + v_c + v_b, \tag{4.9}$$

donde

(1) v_0 cumple las condiciones de (4.8);

(2) $v_c = -(\mathcal{H}_c)'_y \dfrac{\partial}{\partial x} + (\mathcal{H}_c)'_x \dfrac{\partial}{\partial y}$ es el campo vectorial hamiltoniano con hamiltoniano polinomial

$$\mathcal{H}_c(x, y) = \sum c_{i,j} x^i y^j, \quad 0 \leq i \leq n-1, \ 0 \leq j \leq n-1, \ i + j \geq n + 2; \tag{4.10}$$

(3) $v_b = b(x, y)\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ es un campo vectorial radial tal que

$$b(x, y) = \sum_{k=0}^{n-2} b_k(x) y^k x^{n-k}$$

es un polinomio en la variable y de grado menor o igual a $n-2$, cuyos coeficientes $b_k(x)$ son series formales en x.

Además $v_{c,b}$ es la forma normal formal de v.

El objetivo es llevar el germen de campo vectorial a su forma normal al eliminar los términos no indispensables de su expansión de Taylor por medio de cambios de coordenadas polinomiales consecutivos. La prueba es extensa y se logra en varios pasos. Esta se puede encontrar en [15].

Observación 4.10. Debido a las restricciones (4.10), cuando $n = 2, 3$ el término v_c (término hamiltoniano) no aparece en la forma normal formal (4.9).

Ejemplo 4.11. Para $n = 2$. Sea $v \in \mathcal{V}_2^0$ definido por $v = \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} P_i \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=2}^{\infty} Q_i \frac{\partial}{\partial y}$. El teorema 4.9 asegura que v es estricto formal orbitalmente equivalente a su forma normal, el cual es un germen de la forma

$$v_{c,b} = v_0 + v_c + v_b, \tag{4.11}$$

donde
$v_0 = P_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + Q_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$;
$v_c = 0$;
$v_b = b(x,y)\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, tal que, $b(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2-2} b_k(x) y^k x^{2-k} = x^2 b_0(x)$,
es decir, (4.11) se escribe

$$\begin{aligned} v_{c,b} &= \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) + x^2 b_0(x)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \left(P_2 + x^3 b_0(x)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(Q_2 + y x^2 b_0(x)\right)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

El caso $n = 3$ es completamente análogo.

Observación 4.12. Cualquier germen genérico en $\mathcal{V}_n$ se puede reducir mediante un cambio analítico adecuado a uno en la clase $\mathcal{V}(v_0)$. Debido a ello el teorema 4.9 en realidad es menos restrictivo y nos permite tener la clasificación formal "no estricta"para gérmenes en $\mathcal{V}_n$.

En adelante trabajaremos con gérmenes que cumplan con la equivalencia orbital estricta. Si v y w son estricta formal (analítica) orbitalmente equivalentes, por simplicidad solo diremos que v y w son *formalmente (analíticamente) equivalentes*.

Capítulo 5

Singularidad algebrizable

En este capítulo desarrollamos la prueba del resultado principal de la tesis. Definiremos lo que es una singularidad algebrizable y el grado de trascendencia de una 1-forma que defina tal singularidad. A partir de ahí se desprenderá una condición necesaria para determinar la no algebrizabilidad, el objetivo final es la construcción de una singularidad no algebrizable. Para el desarrollo de este capítulo se sigue como referencias [5], [6], [10], [15] y [17].

5.1. Singularidad algebrizable de una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$

Definición 5.1. (Singularidad algebrizable) Decimos que el germen $\mathcal{F}$ de una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada es *algebrizable* si existe una superficie algebraica proyectiva compleja S y un punto $p \in S$, de modo que $\mathcal{F}$ es analíticamente equivalente con el germen en p de una foliación algebraica definida globalmente en S.

La condición de ser algebrizable implica la equivalencia con el germen de una foliación algebraica y por ende la dependencia de un número finito de números complejos que lo caracterice. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.2. Dado el campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$, con parte lineal no nula

$$X = \left(\lambda_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda_2 y + \sum_{k=2}^{\infty} Q_k\right)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{5.1}$$

por el teorema 4.3 sabemos que si $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}^*$, entonces el campo (5.1) es analíticamente equivalente a un campo polinomial de la forma

$$\tilde{X} = (kx + ay^k)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

donde $k = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ y $a \in \mathbb{C}$, de aquí que podemos extender el germen de foliación generada por $\tilde{X}$ al espacio proyectivo $\mathbb{CP}^2$, esto es, el germen generado por X es algebrizable.

Ejemplo 5.3. Tomemos nuevamente como referencia el campo (5.1) del ejemplo anterior. Por el teorema 4.2 sabemos que si $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$, entonces X es analíticamente equivalente al campo polinomial

$$\tilde{X} = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y},$$

y por tanto será algebrizable.

Los ejemplos anteriores son ejemplos clásicos de singularidades algebrizables. Sin embargo, saber si un germen cualquiera es algebrizable no es tarea sencilla. Por tanto una pregunta que surge es ¿qué gérmenes de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ son algebrizables? En [6], Guy Casale prueba que los gérmenes de singularidades de foliaciones holomorfas que admiten una integral primera meromorfa más ciertas condiciones adicionales son algebrizables, esto es enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. [[6] pág.310] *Si $\mathcal{F}$ es una foliación dicrítica simple en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con una integral primera meromorfa, entonces existe una superficie algebraica S, una función racional H en S y un punto $p \in S$ tal que $\mathcal{F}$ es analíticamente equivalente a la foliación dada por curvas de nivel de H en una vecindad de p.* $\square$

Observación 5.5. Una *foliación dicrítica simple* es una foliación dicrítica con integral primera meromorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que sea suave después de una explosión y que una única hoja sea tangente al divisor excepcional con orden de tangencia uno.

Ejemplo 5.6. La cúspide dicrítica es dada por la función racional $\dfrac{y^2 - x^3}{x^2}$. Después de una explosión se obtiene la función $t^2 - x = 0$ que define la foliación en la carta $y = tx$.

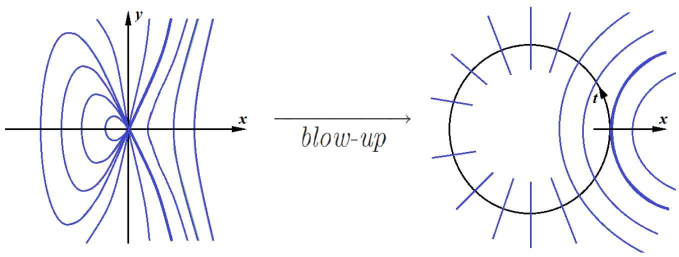

Figura 5.1:

En resumen, disponemos de un criterio para encontrar gérmenes algebrizables.

En [5], P. Sad y G. Calsamiglia extienden el resultado anterior a la familia de gérmenes de las foliaciones que son regulares después de una única explosión (blow-up) en el origen; tal familia es denotada como $\mathcal{D}$. El resultado es el siguiente.

Teorema 5.7. [[5] pág.548] *Cualquier germen de foliación en $\mathcal{D}$ que admita una integral primera meromorfa es algebrizable.* $\square$

Más aún, P. Sad y G. Calsamiglia logran extender el teorema 5.4 y mejorar el resultado del teorema 5.7 al demostrar que se puede lograr que la singularidad ocurra como el germen de una foliación en el plano proyectivo complejo en reemplazo de una "superficie algebraica", tal resultado es válido en el subconjunto de foliaciones de $\mathcal{D}$ que tienen un solo punto de tangencia con el divisor excepcional, en adelante $\mathcal{D}_1$. Este resultado lo enuncian como sigue.

Teorema 5.8. [[5] pág.548] *Cualquier foliación en $\mathcal{D}_1$ que admita una integral primera meromorfa es equivalente a una foliación definida en el plano proyectivo complejo.* $\square$

Por lo tanto tenemos algunos criterios para determinar la algebrizabilidad.

5.2. Grado de trascendencia de una singularidad

Debido a que las singularidades algebraicas están definidas por campos vectoriales polinomiales y 1-formas polinomiales, estas dependen de un número finito de coeficientes complejos que los definen, por lo tanto podemos generar una extensión del cuerpo de los números racionales que nos permita caracterizar la singularidad.

Recordemos que nuestro principal objetivo es la construcción de una singularidad no algebrizable. En esta sección conseguiremos una pista para tal fin. De acuerdo con V. Ramirez en [17], trabajaremos con 1-formas holomorfas en lugar de campos vectoriales holomorfos.

Definición 5.9. Consideremos una 1-forma holomorfa $\eta = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$, con expansión en series de potencia de α y β dadas por

$$\alpha(x,y) = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j \quad \text{y} \quad \beta(x,y) = \sum_{i,j\geq 0}^{\infty} b_{ij}x^i y^j,$$

donde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. Llamaremos *cuerpo de extensión de $\mathbb{Q}$ generado por la 1-forma η* al cuerpo de extensión de $\mathbb{Q}$ que se obtiene por adjuntar a $\mathbb{Q}$ los coeficientes de la expansión en series de potencias de α y β, que en lo sucesivo denotaremos por $\mathbb{Q}(\eta)$.

Observación 5.10. Toda singularidad algebraica está generada por una 1-forma (o un campo vectorial) polinomial. Por tanto, de la definición anterior es sencillo notar que el cuerpo de extensión de $\mathbb{Q}$ generado por una 1-forma holomorfa (o campo vectorial) polinomial es finitamente generado.

Notemos que los coeficientes que definen una 1-forma holomorfa nos pueden brindar cierta información de la misma, pues cuando obtenemos la extensión de $\mathbb{Q}$ generada por dicha 1-forma, a su vez podemos obtener el grado de trascendencia de la extensión y con esto poder caracterizar de alguna manera a la 1-forma. Ello justifica la introducción del siguiente concepto.

Definición 5.11. (Grado de trascendencia de una 1-forma) Dada una 1-forma $\eta = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$. El *grado de trascendencia* de η está definido como el cardinal

$$trdeg(\eta) = \text{mín}\{trdeg\,(\mathbb{Q}(\tilde{\eta})/\mathbb{Q}) : \tilde{\eta} \text{ es formalmente equivalente a } \eta\}.$$

Recordemos que dos 1-formas η y ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ son *formalmente equivalentes* si existe un cambio formal de coordenadas Φ y una función invertible $k \in \mathbb{C}[[x,y]]$ tal que

$$\Phi^*\eta = k\omega.$$

Ejemplo 5.12. Para la 1-forma $\theta = \sqrt{2}xdx + ydy$, el cuerpo de extensión que genera es $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, 1) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Como $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica, entonces $trdeg\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}\right) = 0$ y por lo tanto $trdeg(\theta) = 0$.

Ejemplo 5.13. La 1-forma $\omega = \left(\sum_{j=1}^{\infty} j.x^j\right) dx + \left(\sum_{j=1}^{\infty} j.y^j\right) dy$, genera el cuerpo $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(1, 2, \ldots) = \mathbb{Q}\,(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$, y con esto se tiene $trdeg(\omega) = 0$.

Ejemplo 5.14. Sea la 1-forma $\eta = \pi xdx + e^{\pi}ydy$. Notemos que el cuerpo de extensión $\mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}\,(\pi, e^{\pi})$ genera $\mathbb{Q}\,(\pi, e^{\pi})\,/\mathbb{Q}$ la cual es una extensión trascendente. Además el conjunto $\{\pi, e^{\pi}\}$ es algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$, y con la observación 3.24, tenemos $trdeg\,(\mathbb{Q}\,(\pi, e^{\pi})\,/\mathbb{Q}) = 2$. Por lo tanto, $trdeg(\eta) \leq 2$.

Tengamos en cuenta que debido a la observación 5.10 cualquier 1-forma polinomial $\eta = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ tiene extensión $\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}$ finitamente generada. Además, el lema 3.25 garantiza que $trdeg\,(\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q})$ es finito. De aquí es claro concluir que $trdeg(\eta)$ es finito.

Sabemos que una singularidad o germen algebrizable definida por una 1-forma η es equivalente al germen de una foliación definida en una superficie algebraica proyectiva. Digamos que tal foliación esté definida por la 1-forma ω. Evidentemente ω es polinomial y $trdeg(\omega)$ es finita. La equivalencia entre η y ω garantizará entonces que η tiene también $trdeg(\eta)$ finito.

De los párrafos anteriores concluimos lo siguiente.

Observación 5.15. Toda 1-forma que defina una singularidad algebrizable tiene grado de trascendencia finita.

O de manera equivalente.

Observación 5.16. Una 1-forma con grado de trascendencia infinita define una singularidad no algebrizable.

Por lo tanto, nuestros esfuerzos están enfocados en la construcción de dicha 1-forma holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

5.3. Clasificación formal para singularidades genéricas no dicríticas

El objetivo final está basado en la observación 5.16, construir una 1-forma ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que cumpla $trdeg(\omega) = \infty$; es decir, que defina una singularidad no algebrizable. Recordemos de la definición 5.11 que el grado de trascendencia de una 1-forma está ligado al grado de trascendencia como cuerpo de extensión de $\mathbb{Q}$ de todas las 1-formas equivalentes a ω, más específicamente, al menor grado de entre todas estas: por lo tanto, necesitamos una 1-forma equivalente a ω con grado de trascendencia infinita como extensión de cuerpos de $\mathbb{Q}$, y además que esta 1-forma sea la menor de entre todas sus equivalentes. En esta sección logramos conseguir tales objetivos.

Definición 5.17. Diremos que una 1-forma η que tiene una singularidad degenerada de multiplicidad algebraica 2 es una *singularidad genérica de orden 2* si:

(i) el cono tangente $T = \eta_0(R)$ es diferente de cero y tiene 3 factores lineales simples l_1, l_2, l_3;

(ii) los residuos λ_1, λ_2, λ_3 de la 1-forma meromorfa

$$\frac{\eta_0}{T} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{dl_j}{l_j}$$

no son números racionales.

Acá η_0 es la parte cuadrática homogénea de η y $R = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ es el campo vectorial radial.

Ejemplo 5.18. La 1-forma

$$\rho = \left(4ey^2 - 2xy + 2e^2xy\right) dx + \left(4xy - 4exy - 2e^2x^2\right) dy \ ,$$

es una singularidad genérica de orden 2 pues tiene cono tangente $T = 2x.y.(2y - x)$ diferente de cero (ρ es no dicrítico). Por su parte los residuos de

$$\frac{\rho}{T} = \frac{\rho}{2xy(2y - x)} = \left(e.\frac{d(2x)}{2x} + e^2.\frac{dy}{y} + (1 - e - e^2)\frac{d(2y - x)}{2y - x}\right)$$

son e, e^2 y $1 - e - e^2$, no racionales.

A continuación presentamos un caso particular del teorema 4.9 cuando la multiplicidad algebraica es 2. Como ya mencionamos, inspirados en [17], reexpresaremos el teorema en términos de 1-formas en lugar de campos vectoriales, el cambio es inmediato debido a la observación 1.19.

Teorema 5.19. *Toda 1-forma η en $(\mathbb{C}^2, 0)$ no dicrítica que sea una singularidad genérica de orden 2 es formalmente equivalente a una 1-forma formal H del tipo*

$$H = \eta_0 + x^2 b(x) \left(xdy - ydx\right), \tag{5.2}$$

Acá η_0 es la parte cuadrática homogénea de η y $b(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. Tal forma normal es única bajo pullbacks por homotecias y multiplicación por un factor escalar.

Demostración. La prueba es directa a partir del teorema 4.9 si tenemos en cuenta las observaciones 4.10 y 1.19. □

El cono tangente de una singularidad genérica de orden 2, como en la definición 5.17, es el producto de 3 factores lineales $T = l_1.l_2.l_3$. Claramente mediante un cambio lineal de coordenadas podemos normalizar tales factores y expresarlos como $l_1 = x$, $l_2 = y$ y $l_3 = x - y$.

Así, de acuerdo a la definición 5.17 es sencillo notar que la 1-forma H definida en (5.2) es

$$H = xy(x-y)\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\frac{dl_j}{l_j} + x^2b(x)\,(xdy - ydx)\,,$$

y desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \big((\lambda_1+\lambda_3)xy - \lambda_1y^2\big)\,dx + \big(\lambda_2x^2 - (\lambda_2+\lambda_3)xy\big)\,dy + x^2b(x)\,(xdy - ydx) \\ &= \big[(\lambda_1+\lambda_3)xy - \lambda_1y^2 - yx^2b(x)\big]\,dx + \big[\lambda_2x^2 - (\lambda_2+\lambda_3)xy + x^3b(x)\big]\,dy. \end{aligned}$$

Un simple cálculo permite verificar que $l_1 = x$, $l_2 = y$ y $l_3 = x - y$ son las separatrices de H.

Observación 5.20. En adelante asumiremos, sin pérdida de generalidad, que todas las 1-formas que definan las foliaciones que consideremos tengan cono tangente

$$T(x,y) = xy(x-y).$$

Notemos que la importancia del teorema 5.19 radica en 2 puntos importantes. Primero, que dada una 1-forma con ciertas condiciones, se nos permite encontrar otra 1-forma formalmente equivalente a esta y que además está reducida a su forma normal. De acuerdo con la definición 5.11 nos preocuparemos en probar que tal 1-forma sea mínima de entre todas las 1-formas equivalentes. Segundo, recordemos de la observación 5.16 que lo más importante es conseguir una 1-forma con grado de trascendencia infinita; el teorema 5.19 precisamente nos ofrece la ventaja de poder generar y controlar tal grado de trascendencia gracias al factor $b(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ que aparece en dicho teorema.

Respecto al primer punto, a partir del teorema 5.19 trabajamos el siguiente lema.

Lema 5.21. *Sea $\mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$ y sean $P, Q \in \mathbb{K}[[x,y]]$ series formales de potencias. Supongamos que $\eta = Pdx + Qdy$ define una singularidad genérica de orden 2. La reducción formal que toma η a su forma normal formal (5.2) es dada por una transformación formal definida sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En particular η tiene una forma normal formal definida sobre $\mathbb{K}$, es decir, definida por una 1-forma cuyos coeficientes pertenecen a $\mathbb{K}[[x,y]]$.*

Demostración. Nos vamos a apoyar en el teorema 4.9. Primero se probará que para la 1-forma $\eta = Pdx + Qdy$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$, con las condiciones dadas, se puede rectificar la separatriz tangente a $x = 0$ (lo que es equivalente a la condición (4.3) necesaria para la aplicación del teorema 4.9) mediante un cambio formal de coordenadas.

Para $\eta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, sean $Q(x,y) = \sum_{j,i\geq 2}^{\infty} q_{ji}x^j y^i$ y $P(x,y) = \sum_{j,i\geq 2}^{\infty} p_{ji}x^j y^i$ donde $q_{ji},\ p_{ji} \in \mathbb{K}$. Dado que se tiene $\eta \wedge dx = Q(x,y)dy \wedge dx$, si evaluamos en $x = 0$ obtenemos

$$\eta \wedge dx|_{x=0} = Q(0,y)dy \wedge dx. \tag{5.3}$$

Notemos que al hacer $x = 0$ la serie Q quedará solo en función en la variable compleja y, cual

$$Q(0,y) = \sum_{i=2}^{\infty} q_i y^i = q_2 y^2 + q_3 y^3 + \cdots. \tag{5.4}$$

Al reemplazar (5.4) en (5.3) tenemos

$$\eta \wedge dx|_{x=0} = \left(\sum_{i=2}^{\infty} q_i y^i\right) dy \wedge dx = (q_2 y^2 + q_3 y^3 + \cdots)dy \wedge dx, \tag{5.5}$$

donde algunos coeficientes $q_i \in \mathbb{K}$ podrían ser cero. Supongamos que la separatriz tangente a $x = 0$ ha sido rectificada hasta jets de orden k, es decir, se tenga

$$\eta \wedge dx|_{x=0} = (q_{k+1}y^{k+1} + q_{k+2}y^{k+2} + \cdots)dy \wedge dx, \tag{5.6}$$

o de manera equivalente

$$\eta \wedge dx|_{x=0} = O(y^{k+1}).$$

Afirmación: Si la separatriz tangente a $x = 0$ se rectificó hasta jets de orden k, entonces con el cambio formal de coordenadas

$$\phi_k(u,v) = (u + c_k v^k, v), \tag{5.7}$$

y con una elección adecuada para el coeficiente $c_k \in \mathbb{K}$ podemos rectificar la separatriz hasta jets de orden $k+1$.

En efecto, para la 1-forma $\eta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ el pull back inducido por el cambio de coordenadas (5.7) nos da

$$\begin{aligned}
\phi_k^*\eta &= P(u + c_k.v^k, v)d(u + c_k.v^k) + Q(u + c_k.v^k, v)dv \\
&= P(u + c_k.v^k, v)\left(du + c_k.k.v^{k-1}dv\right) + Q(u + c_k.v^k, v)dv \\
&= P(u + c_k.v^k, v)du + \left(P(u + c_k.v^k, v)c_k.k.v^{k-1} + Q(u + c_k.v^k, v)\right)dv,
\end{aligned}$$

y junto a ello

$$(\phi_k^*\eta) \wedge du = \left(P(u + c_k.v^k, v)c_k.k.v^{k-1} + Q(u + c_k.v^k, v)\right)dv \wedge du.$$

Como queremos ver que ocurre para $x = 0$, mediante el cambio de coordenadas (5.7) podemos forzar $u + c_k v^k = 0$. De ahí obtenemos

$$(\phi_k^*\eta) \wedge du|_{u+c_k.v^k=0} = \left(P(0,v)c_k.k.v^{k-1} + Q(0,v)\right)dv \wedge du. \tag{5.8}$$

Ahora analicemos las series de potencias que aparecen en la ecuación (5.8). Primero, de (5.6) sabemos que se cumple

$$Q(0,v)=\sum_{i=k+1}^{\infty} q_i v^i = q_{k+1}v^{k+1}+q_{k+2}v^{k+2}+\cdots. \tag{5.9}$$

Por otro lado, P es una serie de potencias con parte constante y lineal nulas (pues η es de orden 2). Además notemos en (5.8) que P solo depende de la variable v, así que se tiene

$$P(0,v)=\sum_{i=2}^{\infty} p_i v^i = p_2v^2+p_3v^3+\cdots. \tag{5.10}$$

luego, al multiplicar (5.10) por $c_k.k.v^{k-1}$ obtenemos

$$P(0,v).c_k.k.v^{k-1}=\left(\sum_{i=2}^{\infty} p_i v^i\right) c_k.k.v^{k-1}=\left(\sum_{i=2}^{\infty} p_i v^{k+i-1}\right) c_k.k,$$

es decir

$$P(0,v).c_k.k.v^{k-1}=(c_k.k)p_2v^{k+1}+(c_k.k)p_3v^{k+2}+(c_k.k)p_4v^{k+3}+\cdots. \tag{5.11}$$

sumamos y agrupamos (5.9) y (5.11) para obtener

$$P(0,v)c_k.k.v^{k-1}+Q(0,v)=\left((c_k.k)p_2+q_{k+1}\right)v^{k+1}+\left((c_k.k)p_3+q_{k+2}\right)v^{k+2}+\cdots. \tag{5.12}$$

Por comodidad escribiremos $r_{k+i}=(c_k.k)p_{1+i}+q_{k+i}$, para $i=1,2,\ldots$, de modo que (5.12) se convierte en

$$P(0,v)c_k.k.v^{k-1}+Q(0,v)=(r_{k+1})v^{k+1}+(r_{k+2})v^{k+2}+\cdots. \tag{5.13}$$

Observación 5.22. Si en el cambio de coordenadas ϕ_k dado en (5.7) elegimos un adecuado coeficiente $c_k \in \mathbb{K}$ podemos hacer que en (5.13) el coeficiente $r_{k+1} = (c_k.k)p_2+q_{k+1}$ valga 0, basta con tomar $c_k=\dfrac{-q_{k+1}}{k.p_2}\in\mathbb{K}$. Con ello la ecuación (5.13) queda

$$P(0,v)c_k.k.v^{k-1}+Q(0,v)=(r_{k+2})v^{k+2}+(r_{k+3})v^{k+3}+\cdots,$$

es decir

$$P(0,v)c_k.k.v^{k-1}+Q(0,v)=\sum_{i=k+2}^{\infty}(r_i)v^i. \tag{5.14}$$

Finalmente, cuando reemplazamos (5.14) en (5.8) tenemos

$$(\phi_k^*\eta)\wedge du|_{u+c_k.v^k=0}=\left(\sum_{i=k+2}^{\infty}(r_i)v^i\right)dv\wedge du,$$

y por lo tanto logramos

$$(\phi_k^*\eta)\wedge du|_{u+c_k.v^k=0}=O(v^{k+2}),$$

tal como queríamos.

Al seguir este proceso es posible rectificar completamente la separatriz gracias a una sucesión de transformaciones formales como (5.7). Siendo exactos, todo jet de la sucesión

$$\Phi_N = \phi_N \circ \cdots \circ \phi_2, \tag{5.15}$$

para $N = 2, 3, \ldots$, al final se estabiliza, y en consecuencia conseguimos una transformación formal bien definida

$$\Phi = \lim_{N \to \infty} \Phi_N,$$

cuyos coeficientes pertenecen a $\mathbb{K}$, en otras palabras, la transformación formal se define en el cuerpo $\mathbb{K}$.

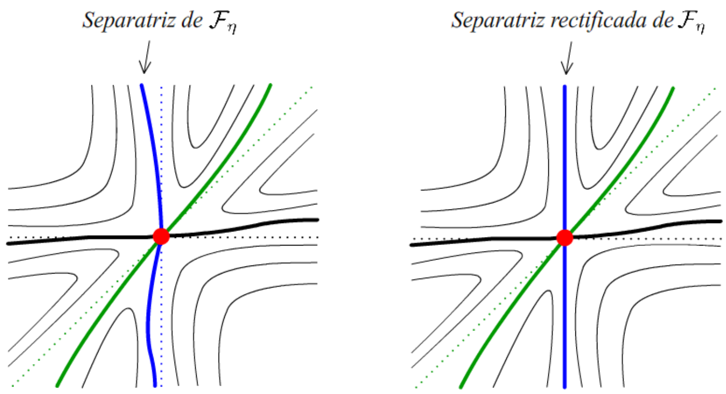

Figura 5.2: Rectificación de la separatriz tangente a $x = 0$.

Ahora, en el proceso de reducción que se usa en la prueba del teorema 4.9 (ver [15] pág. 832), el campo vectorial v es llevado a su forma normal formal $w = v_{c,b}$ (lo que es analógo al teorema 5.19, que reduce la 1-forma η a su forma normal formal H definida por la ecuación (5.2)). Tal reducción se lleva a cabo mediante una sucesión de cambios de coordenadas de la forma $H_{\alpha,\beta} = (x + \alpha(x,y), y + \beta(x,y))$, y por la multiplicación de la función $\mathcal{K} = 1 - \delta$, donde $\alpha(x,y)$ y $\beta(x,y)$ son polinomios homogéneos de grado $k \geq 2$, y $\delta = \delta(x,y)$ es un polinomio homogéneo de grado $k - 1$.

Los polinomios α, β y δ se consiguen al resolver un sistema de ecuaciones que dependen de las coordenadas del campo vectorial v (definido en 4.9). Al seguir este mismo proceso para $\eta = Pdx + Qdy$ llegamos a que α, β y δ son obtenidos de P y Q y por tanto de sus coeficientes: por lo tanto α, β, $\delta \in \mathbb{K}[[x,y]]$. De aquí es que concluimos que la reducción de η a su forma normal formal H está definida por una transformación definida en $\mathbb{K}$: ergo, la 1-forma H está definida en $\mathbb{K}[[x,y]]$. El lema 5.21 ha sido probado. $\square$

Observación 5.23. El lema 5.21 garantiza que la transformación formal de normalización que lleva η a su forma normal H tiene coeficientes en $\mathbb{K}$. Podemos considerar sin ningún problema $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\eta)$: con esto se cumple $\mathbb{Q}(H) \subset \mathbb{Q}(\eta)$, y de aquí tenemos

$$trdeg\left(\mathbb{Q}(H)/\mathbb{Q}\right) \leq trdeg\left(\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}\right),$$

de igual manera, para toda 1-forma $\tilde{\eta}$ formalmente equivalente a η ocurre lo mismo

$$trdeg\left(\mathbb{Q}(H)/\mathbb{Q}\right) \leq trdeg\left(\mathbb{Q}(\tilde{\eta})/\mathbb{Q}\right).$$

Concluimos fácilmente la igualdad

$$trdeg(\eta) = trdeg\left(\mathbb{Q}(H)/\mathbb{Q}\right).$$

El comentario anterior implica que el grado de trascendencia de una 1-forma se minimiza al grado de trascendencia de su forma normal, por ello es claro lo siguiente.

Corolario 5.24. *Para una 1-forma η en $(\mathbb{C}^2, 0)$, en su forma normal formal se cumple*

$$trdeg(\eta) = trdeg\left(\mathbb{Q}(\eta)/\mathbb{Q}\right).$$

5.4. Singularidad no algebrizable

Finalmente en esta sección daremos el resultado principal de este trabajo de tesis: la construcción de un germen de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que defina una singularidad no algebrizable.

En [10] Y. Genzmer y L. Teyssier prueban que existe una cantidad no numerable de singularidades de tipo silla-nodo en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que no son algebrizables. Sin embargo, recalcamos que dicha demostración es no constructiva, es decir, no se enuncia ningún ejemplo de tales singularidades. Finalmente V. Ramírez en [17] desarrolla un ejemplo en concreto: tal resultado es enunciado en el teorema 5.25. Los esfuerzos están enfocados en la observación 5.16 pues para definir una singularidad no algebrizable será suficiente construir una 1-forma que tenga grado de trascendencia infinito. A continuación enunciamos el resultado principal.

Teorema 5.25. *(Singularidad no algebrizable) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ tal que cumplen $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, y sean $f_j = a_j x + b_j y$, $j = 1, 2, 3$, transformaciones lineales arbitrarias diferentes en $\mathbb{C}[x, y]$. Se define la 1-forma cuadrática homogénea*

$$\omega_0 = f_1 f_2 f_3 \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Sea $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(\mathcal{B})/\mathbb{Q}$ tiene grado de trascendencia infinito y tal que la serie de potencias

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

tiene radio de convergencia positivo. Entonces el germen de la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por la 1-forma

$$\omega = \omega_0 + x^2 b(x)(xdy - ydx), \tag{5.16}$$

es no algebrizable.

Demostración. Organizamos la prueba en 3 partes.

Afirmación 1) La 1-forma ω definida por la ecuación (5.16) está en forma normal formal.

En efecto, consideremos una 1-forma $\widetilde{\omega}$ no dicrítica en $(\mathbb{C}^2, 0)$ de multiplicidad algebraica 2 cuya parte homogénea cuadrática sea ω_0 como arriba. En uso de la observación 5.20, vía un cambio lineal de coordenadas podemos reducir los factores lineales $f_j = a_j x + b_j y$, $j = 1, 2, 3$ a $f_1 = x$, $f_2 = y$ y $f_3 = x - y$, a fin de obtener

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= xy(x-y)\left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{d(x-y)}{x-y}\right) \\
&= xy(x-y)\left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + (1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{d(x-y)}{x-y}\right) \\
&= \lambda_1 y(x-y)dx + \lambda_2 x(x-y)dy + (1-\lambda_1-\lambda_2)xyd(x-y) \\
&= \big(-\lambda_1 y^2 + (1-\lambda_2)xy\big)\, dx + \big(\lambda_2 x^2 + (\lambda_1 - 1)xy\big)\, dy.
\end{aligned}$$

Ahora es claro que el cono tangente es

$$\begin{aligned}
T &= \omega_0(R) \\
&= \Big(\big(-\lambda_1 y^2 + (1-\lambda_2)xy\big)\, dx + \big(\lambda_2 x^2 + (\lambda_1 - 1)xy\big)\, dy\Big)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= \Big[\big(-\lambda_1 y^2 + (1-\lambda_2)xy\big)\, dx\Big]\, x\frac{\partial}{\partial x} + \Big[\big(\lambda_2 x^2 + (\lambda_1 - 1)xy\big)\, dy\Big]\, y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \big(-\lambda_1 y^2 + (1-\lambda_2)xy\big)\, x + \big(\lambda_2 x^2 + (\lambda_1 - 1)xy\big)\, y \\
&= xy(x-y)\ ,
\end{aligned}$$

el cual tiene 3 factores lineales simples "x", "y", "$x - y$". Por su parte, la 1-forma meromorfa $\dfrac{\omega_0}{T}$ tiene residuos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$ irracionales por hipótesis. De este modo, por definición $\widetilde{\omega}$ es una singularidad genérica de orden 2 y por el teorema 5.19 concluimos que $\widetilde{\omega}$ es formalmente equivalente a una 1-forma formal

$$\omega = \omega_0 + x^2 b(x)(xdy - ydx),$$

en su forma normal formal.

Afirmación 2) La 1-forma ω, definida por la ecuación (5.16), no es analíticamente equivalente a una 1-forma polinomial en $\mathbb{C}^2$.

En efecto, tomemos $\eta = Pdx + Qdy$ una 1-forma polinomial en $\mathbb{C}^2$ que sea una singularidad genérica de orden 2 y sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\eta)$ el cuerpo generado por los coeficientes (finitos) de los polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$, entonces el grado de trascendencia de $\mathbb{K}$ es finito, más aún, por ello $trdeg(\eta)$ es finito.

Supongamos que ω sea analíticamente equivalente a η en una vecindad del origen en $\mathbb{C}^2$. Por el teorema 5.19 sabemos que η es formalmente equivalente a una 1-forma del tipo $H = \eta_0 + x^2 f(x)\,(xdy - ydx)$, la cual es la reducción de η a su forma normal formal. Por el lema 5.21 tenemos que H está definido en $\mathbb{K}$ (H podría tener infinitos coeficientes pero todos están en $\mathbb{K}$). Luego, por la observación 5.23 se tiene

$$trdeg(\eta) = trdeg\,(\mathbb{Q}(H)/\mathbb{Q})\,,$$

con lo cual resulta que $trdeg\,(\mathbb{Q}(H)/\mathbb{Q})$ es finito y del corolario 5.24 concluimos lo mismo para $trdeg(H)$.

Por otro lado, notemos que $\omega = \omega_0 + x^2 b(x)(xdy - ydx)$ está definido por los coeficientes de su parte cuadrática w_0 y del conjunto $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots\}$. De la hipótesis se sabe que la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(\mathcal{B})/\mathbb{Q}$ tiene grado de trascendencia infinito, y así

$$\infty = trdeg\,(\mathbb{Q}(\mathcal{B})/\mathbb{Q}) \leq trdeg(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})),$$

es decir, se tiene $trdeg(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})) = \infty$. Como ω ya está en su forma normal formal, del corolario 5.24 concluimos

$$trdeg(\omega) = trdeg(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}) = \infty,$$

y por lo tanto $trdeg(\omega)$ es infinito.

Por lo dicho anteriormente (la equivalencia de ω y η y la equivalencia de H y η) resulta que ω y H son formalmente equivalentes, donde ambos son formas normales formales, por consiguiente, el teorema 5.19 implica que H y ω difieren a lo mucho por un cambio lineal de coordenadas ϕ y una multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ con

$$\phi^* H = \lambda \omega. \tag{5.17}$$

Esto es una contradicción, tal igualdad es imposible pues $trdeg(H)$ es finito y en cambio $trdeg(\omega)$ es infinito.

En resumen, no es posible que la 1-forma ω sea analíticamente equivalente a una 1-forma polinomial en $\mathbb{C}^2$.

Afirmación 3) La 1-forma ω define una singularidad no algebrizable, es decir, ω no es holomorficamente equivalente al germen de una singularidad de una foliación en una superficie proyectiva.

En efecto, supongamos que ω es algebrizable. Entonces existe una foliación $\mathcal{F}$ en una superficie algebraica lisa $S \subset \mathbb{CP}^N$, tal que el germen de la singularidad definida por ω es holomorficamente equivalente al germen de $\mathcal{F}$ en un punto $p \in S$. Sea ρ el germen de la foliación $\mathcal{F}$ en dicho punto ($\mathcal{F} : \rho = 0$). Puesto que p es un punto regular de la superficie S, el teorema de la función implícita nos permite hallar una proyección

$$\pi : \mathbb{CP}^N \longrightarrow \mathbb{CP}^2,$$

tal que cerca del punto p, de manera local la restricción

$$\pi|_S : (S,p) \longrightarrow \left(\mathbb{CP}^2, \pi(p)\right),$$

es un biholomorfismo, de modo que localmente es una proyección 1-1.

Dado que $\pi|_S$ es un biholomorfismo local, la inversa local $\pi|_S^{-1} : (\mathbb{CP}^2, \pi(p)) \longrightarrow (S,p)$ es una función holomorfa. Además la foliación $\mathcal{F}$ de (S,p), vía $\pi|_S^{-1}$ define una foliación en $(\mathbb{CP}^2, \pi(p))$ dada por

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left(\pi|_S^{-1}\right)^* \mathcal{F},$$

acá $\widetilde{\mathcal{F}}$ es el pullback o imagen inversa de $\mathcal{F}$. Esto define un germen de una singularidad de la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ alrededor de $\pi(p)$, la cual es dada localmente por una 1-forma η (no necesariamente polinomial), $(\widetilde{\mathcal{F}} : \eta = 0)$. Sin pérdida de generalidad consideremos que la 1-forma η está definida en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

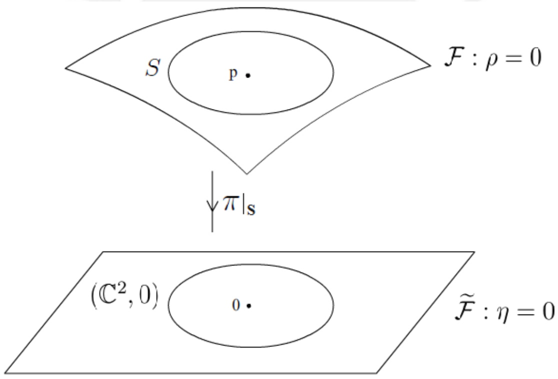

Figura 5.3:

Por otro lado, tanto la superficie algebraica S, la función $\pi|_S$, como la foliación $\mathcal{F}$ están definidas por un número finito de parámetros en $\mathbb{CP}^N$. En efecto, $\pi|_S$ es una proyección lineal y para definirla se necesita un número finito de coeficientes complejos, la superficie algebraica S y la foliación algebraica $\mathcal{F}$ están definidas por polinomios (los coeficientes de las diferenciales de la 1-forma que define $\mathcal{F}$ son polinomios), es decir, por una cantidad finita de números complejos. Si denotamos $\mathbb{K}$ al subcuerpo de $\mathbb{C}$ que se genera por adjuntar todos estos coeficientes a $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{K}$ es finitamente generado y con el lema 3.25 verificamos que $trdeg\,(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ es finito.

Notemos que como $\pi|_S : (S,p) \longrightarrow (\mathbb{CP}^2, \pi(p))$ está definido sobre $\mathbb{K}$, su inversa local $\pi|_S^{-1} : (\mathbb{CP}^2, \pi(p)) \longrightarrow (S,p)$ también lo está. De lo anterior tenemos que la foliación $\widetilde{\mathcal{F}} = \left(\pi|_S^{-1}\right)^* \mathcal{F}$, inducida por la 1-forma η, también está definida sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Esto implica que η está definida sobre $\mathbb{K}$, y por lo tanto tenemos

$$trdeg(\eta) \leq trdeg(\mathbb{K}/\mathbb{Q}) < \infty.$$

El germen de la foliación $\mathcal{F}$ definido por la 1-forma ρ en el punto $p \in S$ es holomorficamente equivalente a ω (por la suposición inicial de la afirmación 3). Además, como $\mathcal{F}$ es llevado a $\widetilde{\mathcal{F}}$ vía el biholomorfismo $\pi|_S^{-1}$ tenemos $\eta = (\pi|_S^{-1})^*\rho$. Por consiguiente η es holomorficamente equivalente a ρ y esto implica que η y ω son holomorficamente equivalentes, lo que es una contradicción a la **Afirmación 2)** pues $trdeg(\eta)$ es finito y $trdeg(\omega)$ es infinito.

Por lo tanto la 1-forma ω define una singularidad que no es algebrizable, tal como se quería probar, y el teorema queda demostrado. $\square$

5.5. Ejemplo de una singularidad no algebrizable

Es necesario precisar que el punto clave de nuestro resultado principal (teorema 5.25) radica en la observación 5.16: construir una 1-forma que tenga grado de trascendencia infinito. Evidentemente conseguir tal grado de trascendencia no es tarea sencilla, sin embargo el teorema de Lindeman-Weierstrass nos proporciona las herramientas para este propósito.

En base al teorema de Lindeman-Weierstrass y sus respectivos corolarios 3.36 y 3.35, recaerá gran importancia sobre la elección adecuada de los coeficientes que definen la serie de potencias $b(x)$ en la ecuación (5.16) del teorema 5.25, pues son estos los que permitirán conseguir el grado de trascendencia infinito. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.26. El germen de foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por la 1-forma

$$\omega = f_1 f_2 f_3 \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{e^{k\sqrt{k}}} \right) (xdy - ydx), \tag{5.18}$$

es no algebrizable; acá

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = x - y, \quad \lambda_1 = \pi, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2. \tag{5.19}$$

Haremos uso del teorema 5.25 para verificar que la 1-forma ω define una singularidad no algebrizable. Notemos de (5.18) que la 1-forma ω está expresada en la forma de la ecuación (5.16), es decir, cual

$$\omega = \omega_0 + x^2.b(x)\,(xdy - ydx)\,,$$

donde

$$\omega_0 = f_1 f_2 f_3 \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}, \tag{5.20}$$

y

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{e^{k\sqrt{k}}}. \tag{5.21}$$

Analicemos estas 2 ecuaciones. Primero veamos (5.20). Si reemplazamos (5.19) en esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= xy(x-y)\left(\pi.\frac{dx}{x}+\sqrt{2}.\frac{dy}{y}+\left(1-\pi-\sqrt{2}\right).\frac{d(x-y)}{x-y}\right)\\
&= \pi.y(x-y)dx+\sqrt{2}.x(x-y)dy+\left(1-\pi-\sqrt{2}\right)xyd(x-y)\\
&= \left[\pi.y(x-y)+\left(1-\pi-\sqrt{2}\right).xy\right]dx+\left[\sqrt{2}.x(x-y)-\left(1-\pi-\sqrt{2}\right).xy\right]dy\\
&= \left[(1-\sqrt{2})xy-\pi.y^2\right]dx+\left[(\pi-1)xy+\sqrt{2}.x^2\right]dy,
\end{aligned}$$

por lo tanto ω_0 es una 1-forma cuadrática homogénea. Además es claro que el cono tangente de la 1-forma ω definida por (5.18) es

$$\begin{aligned}
T &= \left[(1-\sqrt{2})xy-\pi.y^2\right]x+\left[(\pi-1)xy+\sqrt{2}.x^2\right]y\\
T &= xy(x-y).
\end{aligned}$$

Así la 1-forma ω es una singularidad genérica de orden 2, con separatrices definidas por las rectas $f_1=0$, $f_2=0$ y $f_3=0$.

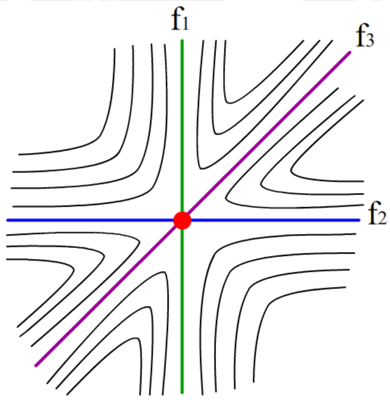

Figura 5.4: Separatrices del germen ω.

Ahora analicemos la serie $b(x)$ definida en (5.21). Notemos que esta serie está definida por los coeficientes $e^{-k\sqrt{k}}$. Si denotamos por $\mathcal{B}$ al conjunto de estos infinitos coeficientes y además si denotamos a sus exponentes por $\alpha_k=-k\sqrt{k}$, para todo $k=0,1,2,\ldots$ entonces tenemos que $\mathcal{B}=\{e^{\alpha_k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Los exponentes α_k son números algebraicos pues son raíces de polinomios $f_k(X)=X^2-k^3\in\mathbb{Q}[X]$, además obviamente estos exponentes son todos distintos y más aún, son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Por el corolario 3.35 del teorema Lindeman-Weierstrass tenemos que $\mathcal{B}$ es algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}$, y así por el corolario 3.36 tenemos

$$trdeg(\mathbb{Q}(\mathcal{B})/\mathbb{Q})=trdeg(\mathbb{Q}(e^{\alpha_0},e^{\alpha_1},\ldots)/\mathbb{Q})=+\infty.$$

Además es sencillo probar que la serie

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{e^{k\sqrt{k}}},$$

tiene radio de convergencia positiva.

Por lo tanto se cumplen todas las condiciones del teorema 5.25, y efectivamente la 1-forma ω define una singularidad no algebrizable.

Conclusiones

Un germen algebrizable es analíticamente equivalente al germen de una foliación algebraica, lo que conlleva a la dependencia de una cantidad finita de números complejos que la defina. Podemos aseverar así que un germen algebrizable tiene grado de trascendencia finita.

El objetivo central de este trabajo de tesis ha sido dar un criterio para definir un germen no algebrizable. Para lograr este propósito es suficiente construir una 1-forma con grado de trascendencia infinito.

Debido al razonamiento usado en la demostración del teorema 5.25, se ha probado implícitamente que para cualquier superficie proyectiva S, un punto regular $p \in S$ y $\mathcal{F}$ una foliación sobre S con singularidad aislada en p, el germen de singularidad de $\mathcal{F}$ en p tiene grado de trascendencia finita.

Bibliografía

[1] Benazic R. *Singularidades de campos vectoriales holomorfos en el dominio de Poincaré*. Pro Mathematica: Vol. X, Nos. 19-20, 1996.

[2] Camacho C. - Lins-Neto A. *Introdução à Teoría das Folheações*. 11° Coloquio Brasileiro de Matemática - IMPA CNPq, 1977.

[3] Camacho C. - Lins-Neto A. *Teoría Geométrica das folheações*. Projeto Euclides - IMPA CNPq, 1979.

[4] Camacho C. - Sad P. *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*. 16° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.

[5] Calsamiglia G. - Sad P. *Extension of germs of holomorphic foliations* Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6), 24(3):543−561, 2015.

[6] Casale G. *Simple meromorphic functions are algebraic*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 44(2):309−319, 2013.

[7] Dulac H. *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*. École Polytechnique, 1904.

[8] Dumortier F. - Llibre J. - Artés J. *Qualitative theory of planar differential systems* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[9] Filaseta M. *Algebraic number theory*. math 784 Class notes, 2010.

[10] Genzmer Y. - Teyssier L. *Existence of non-algebraic singularities of differential equation*. J. Differential Equations, 248(5):1256 − 1267, 2010.

[11] Haro A. - Loeza L. *Números trascendentes y construcciones imposibles con regla y compás*. Avanza. Vol. III. Fm - Iit, Uacj: 99 − 128, 2013.

[12] Lang S. *Algebra 3 ° Edition*. Springer, 2002.

[13] Lins-Neto A. - Scárdua B. *Folheações Algébricas Complexas*. 21° Coloquio Brasileiro de Matemática - IMPA CNPq, 1997.

[14] Milne J. *Fields and Galois Theory*. Course notes, 2017.

[15] Ortiz-Bobadilla L. - Rosales-Gonzále E. - Voronin S. M. *Thom's problem for degenerate singular points of holomorphic foliations in the plane*. Mosc. Math. J., 12(4):825 − 862, 885, 2012.

[16] Poincaré H. *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différence partielles*. Première Thèse. Gauthier-Villars, 1879

[17] Ramírez V. *An example of a non-algebraizable singularity of a holomorphic foliation*. Enseign. Math., 62(1/2):7−14, 2016.

[18] Roman S. *Field Theory. Second edition*. Springer, 2006.